

LA MECÁNICA DE LOS FLUIDOS EN JORGE JUAN

Julián Simón Calero

INTA. Madrid

RESUMEN

Se analiza la teoría de Jorge Juan sobre la resistencia fluídica, tal como la expone en el *Examen Marítimo*. Se estudian las bases teóricas y sus aplicaciones, desde placas planas hasta cacos y velas de buques. Se concluye con una revisión de lo que Juan considera sus fundamentos experimentales y se rastrean los posibles antecedentes de su teoría.

PALABRAS CLAVE: Jorge Juan, mecánica de los fluidos, siglo XVIII, resistencia de buques.

SUMMARY

The Jorge Juan theory on fluid resistance is analysed as stated in the *Examen Marítimo*. The theoretical basis and applications are studied, these range from flat plates to ship hull and sails. The article concludes with a revision of what Juan considers to be its experimental basis and possible forerunners of his theory are traced.

KEY WORDS: Jorge Juan, fluid mechanics, 18th century, ship resistance.

1. EL EXAMEN MARÍTIMO

El *Examen Marítimo Teórico Práctico, o Tratado de Mecánica aplicado a la construcción, conocimiento y manejo de Navíos y demás Embarcaciones*, al que en adelante nos referiremos simplemente como *Examen*, es la obra más significativa de Jorge Juan y Santacilia¹. Vio la luz en 1771 en la Imprenta de D. Francisco Manuel de Mena en Madrid, dos años antes de la muerte del autor². En el panorama del siglo XVIII esta obra ocupa un lugar destacado entre los tratados navales escritos en ese

¹ Este trabajo es una ampliación de las ideas sobre Jorge Juan contenidas en SIMÓN CALERO, J. (1996), *La génesis de la mecánica de los fluidos*, Madrid, UNED.

² Hay dos reediciones facsímiles, una por el Instituto de España en 1968 y otra por la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales en 1992.

siglo³, y en especial en relación con el *Traité du Navire* de Pierre Bouguer y la *Scientia navalis* de Leonhard Euler, publicadas en 1749 y 1746 respectivamente, aunque ambas gestadas al filo de 1740⁴.

La intención de Jorge Juan al escribir esta obra está claramente expuesta el principio del Prólogo que reproducimos a continuación:

La instrucción del Marinero, si exceptuamos los cortos principios en que se funda el Pilotaje, se ha considerado, hasta muy poco tiempo ha, de pura práctica. La fábrica del Navío, y otras Embarcaciones, y sus maniobras, que es el modo de manejarlas, ha estado siempre en manos de unos casi meros Carpinteros, y de otros puramente Trabajadores u Operarios: ninguna dependencia se creyó que tuviesen de la Matemática, sin embargo de no ser el todo sino pura Mecánica: Ciencia, quizás, la más difícil y más intrincada del mundo; ¿pero qué mucho? En el Marinero, todo ocupado al riesgo, al trabajo y a la fatiga, no cabe quietud para estudio tan dilatado y prolijo; y el estudioso, que requiere suma tranquilidad para la contemplación, no se acomoda al afán y fatiga extrema del otro, únicas maestras que enseñan con facilidad las resultas que sólo por la teórica fuera casi imposible descubrir. La dificultad de unir estas dos partes, en que consiste perfeccionar estudio tan manifiestamente útil, le tuvo por consiguiente en tinieblas tantos siglos hace; pero como en el presente han florecido con admiración las Matemáticas, y se han introducido con beneficio singular en casi todas las Ciencias o Artes, era irregular que no hubiera logrado lo mismo la Marinería, o a lo menos, que no se diese principio a la necesaria perfección para que con él se cultivase progresivamente. [Pról., p. v]⁵.

La cita, aun cuando sea algo larga, expresa muy claramente la preocupación de Juan por mejorar cualitativamente la construcción naval, sacándola de la artesanía e introduciendo los elementos de la ciencia. Sin embargo, a pesar de las alusiones a «la pura práctica» o a los «meros carpinteros», recuerda que son el «afán y fatiga» las maestras que nos enseñan que la teoría sola no enseña; con lo que pone el dedo en esa sempiterna cuestión de unir práctica y estudio. El problema de trasladar la ciencia a los barcos es una preocupación compartida por sus contemporáneos. Desde el último tercio del siglo XVII se intentaba aplicar reglas al dimensionado de los buques. Era cierto que la experiencia había aportado ciertas reglas, que se tradujeron en trata-

³ El *Examen* fue traducido al francés, con anotaciones por Pierre L'Evêque, en dos ediciones, una en 1783 y otra en 1793. En España, Gabriel de Císcar inició una reedición, también comentada, de la que sólo apareció el Libro I del primer volumen. En 1819 aparece una traducción al italiano por Simone Stratico que incluye los comentarios de las anteriores más los propios. Estas ediciones prueban el interés que despertó la obra, lo que se complementa por las críticas favorables, como la de Jean-Etienne Montucla en su *Histoire des Mathématiques* [Part. V, Lib. VIII, p. 383, 403, 453] y las que aparecen en la traducción al francés del *Tractat om skepps-buggeriet* de Frederic Henrik Chapman (nota p. 55).

⁴ Bouguer en tierras del Virreinato del Perú durante la expedición para la medición de un arco de meridiano, en la que también participaron Jorge Juan y Antonio de Ulloa, y Euler entre Berlín y San Petersburgo, haciendo sus maletas para trasladarse definitivamente a esta última ciudad.

⁵ Las referencias entre corchetes se referirán al *Examen* y salvo indicación al Libro 2 del Vol. 1. Se ha actualizado la ortografía de las citas y la simbología para que sean coherentes con el texto.

dos normativos que aparecieron en los países más marineros, como las *Proporciones de las medidas más esenciales... para la Fábrica de Navíos y Fragatas de Guerra*, de Gaztañeta de 1720, *L'Architecture Navale* de Dassié de 1677 y el *Ship builders assistant* de Sutherland de 1711, pero eso no era suficiente. No sólo era necesario dar las dimensiones, sino el porqué de éstas. Las palabras de Bouguer en el *Traité du navire* son muy claras:

Nos proponemos tratar de la construcción de barcos, y de la mecánica de sus movimientos, de sustituir, si se puede, las prácticas oscuras y titubeantes que se usan en la marina por reglas exactas y precisas. La arquitectura naval, para hablar con rigor, no ha llegado a ser hasta ahora un arte; queremos hacer con ahínco que ella lo sea y que en adelante no se obre en toda esta materia más que con luz y pleno conocimiento de causa. Es cierto que esta materia es digna por una infinidad de motivos de la atención de nuestros lectores y de los más hábiles matemáticos. Además se trata de la salud y de la conservación de los marinos que no temen exponerse a los más grandes peligros por nuestro propio beneficio⁶.

La diferencia más significativa entre estas palabras y las de Juan es la llamada de éste a no olvidar la práctica. Por ello, en el prólogo del *Examen* pasa revista a las obras más relevantes conocidas sobre esta materia, entre las que estaba el *Traité*, analizando en cada una los presupuestos y resultados, para concluir que había una falta de acuerdo entre las previsiones teóricas y los resultados prácticos. Juan achaca ese desajuste a la teoría de partida, sobre lo que afirma: «es preciso y evidente, que la teórica enseñada sea falsa, o por mejor decir, que lo sean los principios o suposiciones sobre los que se fundó» [Pról., p. xix]. Y a continuación, tras un corto análisis, identifica que: «Todo el error debía recaer, por consiguiente, sobre suponer que las fuerzas, o lo que es lo mismo, las resistencias de los fluidos fuesen como los cuadrados de sus velocidades, y senos de incidencia» [*Ibid.*]. Concluye con la reflexión de que «El asunto pedía un serio examen, y éste es el mismo que me propuse, sin excusar trabajo o fatiga» [Pról., p. xxii]. Que Juan quedó satisfecho con los resultados queda patente cuando dice: «El empeño, aunque arduo, produjo aún mucho más de lo que yo esperaba» [*Ibid.*].

Este examen lo articula Juan en tres fases. La primera, la experimentación: «Era menester empezar por seguras experiencias, que acreditasen la duda de las resistencias» [*Ibid.*]. La segunda, establecer una base teórica que las justificase: «buscar después, por vías diversas, o por las mismas con que actúa la Naturaleza, otra teórica de ellas» [Pról., p. xxiii]. Y finalmente ver si en las aplicaciones prácticas concordaban predicciones y resultados, «y últimamente examinar si esta [teórica] convenía, no solamente con la marcha de los Navíos, sino con todas sus acciones, y asimismo con todos los efectos o movimientos que en la Naturaleza se observan» [*Ibid.*]. En el desarrollo del *Examen*, como veremos, comienza por establecer su teoría que aplica

⁶ *Op. cit.* Libro I, p. 1.

al movimiento de superficies y cuerpos. Los experimentos que realiza son mediciones de la resistencia de una placa sumergida en una corriente, que analiza a la luz de su teoría y de las otras al uso. Posteriormente, aplica su teoría a navíos y contrasta sus previsiones con la práctica.

Volviendo al *Examen*, si bien se publicó en 1771, estimamos que Juan lo escribió mucho antes y que al menos su primera redacción se gestó alrededor del año 1750. Trataremos de justificar esta conjetura. Las primeras referencias conocidas sobre la intención de Juan de escribir un tratado marítimo están en una carta que escribió al marqués de la Ensenada⁷, desde Londres donde estuvo entre 1748-49. Recordemos que Jorge Juan estaba en esa ciudad con el pretexto de estudiar matemáticas, aunque más bien cumplía una misión de información sobre la marina y la construcción naval inglesa. La personalidad de Jorge Juan era conocida en la época, puesto que había sido uno de los integrantes de la expedición enviada pocos años antes por la Academia de París al Virreinato del Perú para medir el arco de meridiano. Tanto por esto como por razón de su comisión oficial trabó conocimiento con personalidades y sabios, llegando a ser propuesto y elegido miembro de la Royal Society⁸. Es plausible que por entonces comenzase la redacción de su obra, no sólo en razón del esfuerzo de observación de la construcción naval británica, sino por tener a su disposición los textos de las bibliotecas de esa ciudad. Juan abandonó precipitadamente Londres en 1749, regresando a España tras una corta estancia en París⁹.

Pero si bien lo anterior es una mera conjetura, datos concordantes los obtenemos del análisis de las citas del *Examen*. En total hay 267 referencias, de las que sólo tres corresponden a obras posteriores a 1750. Estas son:

* «An experimental enquiry concerning the natural powers of water and wind mills, and other Machines depending on a circular motion» (1759) de John Smeaton,

⁷ Los fragmentos de esta carta referidos a este tema, así como los de la contestación del marqués, están citados en MORALES HERNÁNDEZ, J. L. (1973), «Jorge Juan en Londres», *Revista General de Marina*, Junio, pp. 663-670.

⁸ El acta de elección dice: «Don Jorge Juan de Madrid, ahora residente en Londres. Un caballero bien versado en conocimientos matemáticos y filosóficos, y uno de los caballeros enviados por el rey de España para medir un grado del meridiano en el ecuador para determinar la forma de la Tierra, deseando ser elegido [miembro] de la Royal Society, es recomendado por nosotros como merecedor de tal honor, así como esperamos que él será un valioso miembro de nuestra comunidad. Londres, 6 de abril de 1749» Siguen las firmas de Stanhope, M. Folkes, C. Stanhope, John Ellicott, Benjth Robins y W^m Watson, terminando en «Votado y elegido el 9 de noviembre de 1749».

⁹ Hay un aspecto interesante al respecto que valdría la pena explorar, que es la relación del *Examen* con el Nuevo Método Español de Construcción Naval aprobado en 1754 y al que Juan se dedicó casi con exclusividad, según explican Antonio Lafuente y José Luis Peset en «Política científica y espionaje industrial en los viajes de Jorge Juan y Antonio de Ulloa (1748-1751)» en los *Melanges de la Casa de Velázquez*, tomo XVII, 1981. Sobre la política de aquellos años también es interesante consultar el excelente libro *La Arquitectura Naval Española*, Madrid, 1920, de Gervasio Artiñano y Galdácano.

publicado en las *Philosophical Transactions*, 1759, citado en el Prólogo (p. xxvii) y en el Apéndice II al Tomo I.

* *La Manoeuvre des vaisseaux* (1757) de Pierre Bouguer, citado en el Vol. I, p. 80.

* «Des Cerfs-volans» («Las cometas») en las *Mémoires de l'Académie* de Berlín, 1756, de Mr. Euler en el Apéndice I al Vol. 1¹⁰.

En particular sobre Smeaton, en el Apéndice II, dice:

Después de casi concluida la impresión de esta Obra, me vinieron de Inglaterra el resto de las Transacciones Philosophicas de aquella Real Sociedad, que me faltaban, y se habían impreso nuevamente. [p. 425 del Vol. I del *Examen*].

La obra citada es de 1759 y las *Phil. Trans.* no se reeditaron en el siglo XVIII, sin embargo, sí hubo separatas del artículo de Smeaton en 1760¹¹. No está claro si es a éstas a las que se refiere Juan; de todas formas la diferencia de un año entre ambas no es significativa. La otra cuestión es cuánto tardaron en llegar a manos de Juan esas obras; contando los retrasos en la entrega y sus frecuentes viajes, habría que estimar algunos años más.

Respecto al trabajo de las cometas de Euler, salió a la luz en 1758.

Pero hay más indicios. En el Prólogo dice:

Últimamente (año 1749) *Leonardo Eulero*, Director de la Real Academia de Berlín, nos dio dos tomos en cuarto con el título de *Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus*. [Pról. p. xiv]

La *Scientia* se publicó en 1749. Ahora bien, ¿qué entendía por «últimamente»? Obviamente pocos años. En el mismo párrafo sigue:

Después de éstas, se han visto algunas pequeñas Obras más, ya de práctica ya de teórica; pero podemos asegurar, que lo que no se encuentra en estos dos célebres Autores [Euler y Bouguer], no es lo principal de los que se ofrece en la teórica de la Marina.

Aunque nos gustaría conocer qué entendía Juan por pequeñas obras, es cierto que hasta el *Examen* no hubo ninguna obra de construcción naval de magnitud similar¹².

¹⁰ El autor es el hijo de Leonhard Euler, que firma como «le fils».

¹¹ Esta información proviene del bibliotecario de la Royal Society en 1995.

¹² La lista de tratados y monografías navales del XVIII es bastante larga. A continuación damos una relación cronológica de las más significativas:

- *De la Théorie de la Manoeuvre des Vaisseaux*, 1689, por Bernard Renau d'Eliçagaray.
- *Théorie de la construction des Vaisseaux*, 1697, por Paul Hoste.
- *Théorie de la manoeuvre des vaisseaux*, 1714, por Johann Bernoulli.

En resumen, es fácil que el manuscrito básico del Tomo I lo completase Juan en su estancia en Londres o muy poco tiempo después. El Tomo II es muy probablemente posterior.

Antes de continuar y con el fin de facilitar el enmarque del *Examen* en su tiempo, conviene que dediquemos unas palabras a contextualizar la situación de estas teorías en la época. Estimamos que la mecánica de los fluidos se inició siguiendo dos líneas básicas: una que denominamos «el problema de la resistencia» y la otra «el de la descarga»¹³. La primera arranca de la determinación de la resistencia de cuerpos móviles y la otra por la descarga de depósitos. La teoría de la resistencia, en un sentido científico, la formuló Newton en los *Principia* aunque con el precedente de Mariotte expuesto en el *Traité du mouvement des eaux*. Para estudiar el movimiento en el aire, Newton supuso que éste se comportaba como un conjunto de corpúsculos inmóviles que impactaban en el cuerpo transfiriéndole cantidad de movimiento, lo que daba como resultado una proporcionalidad entre la resistencia y el cuadrado de la velocidad. Este modelo se correspondía con la estructura física que atribuían al aire, que suponían formado por partículas individuales aunque móviles. Sin embargo, para el movimiento en el agua este modelo no servía, ya que en ésta las partículas que la constituían estaban en contacto unas con otras, por lo que para hallar la resistencia Newton buscó caminos alternativos, cuyos resultados conducían a la misma proporcionalidad, aunque con distintos coeficientes. Esta teoría, que llamamos del impacto, se mantuvo como modelo matemático para todos los fluidos; no obstante, para la mayoría de los autores posteriores perdió su virtualidad física quedando únicamente como modelo matemático, al que introdujeron variantes y correcciones tratando de aproximar la teoría a la práctica. La línea de la descarga tiene su fundamento teórico en la *Hydrodinamica*¹⁴ de Daniel Bernoulli quien analizó los fluidos como un continuo y formuló por primera vez el denominado teorema de Bernoulli, que completó su

-
- *De la nature des Vaisseaux*, 1727, por Pierre Bouguer.
 - *La théorie de la manoeuvre des Vaisseaux reduite en pratique*, 1731, por Henri Pitot.
 - *Traité du Navire, de sa construction et de ses mouvements*, 1746, por Pierre Bouguer.
 - *Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus*, 1749, por Leonard Euler.
 - «Solutions des principaux problèmes de la manoeuvre des Vaisseaux», por Pierre Bouguer en las *Mémoires de l'Academie de Paris*, en 1754 y 1755.
 - *De la manoeuvre des vaisseaux*, 1757, por Pierre Bouguer.
 - *Architectura navalis mercatoria*, 1768, por Frederic Henrik Chapman.
 - *Examen Marítimo Theórico Práctico ó tratado de mechanica aplicado á la construccion, conocimiento y manejo de los navíos y demas embarcaciones*, 1771, por Jorge Juan y Santacilia.
 - *Théorie complète de la construction et de la manoeuvre des vaisseaux*, 1773, por Leonard Euler.
 - *Tractat Om Skepps-Byggeriet*, 1775, por Frederic Henrik Chapman.

¹³ La justificación de esta tesis está desarrollada en *La génesis de la mecánica de los fluidos*.

¹⁴ *Hydrodinamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, Estrasburgo, 1738.

padre Juan en la *Hydraulica*¹⁵. Este camino llevaría a la gran teorización de mediados del XVIII, realizada por d'Alembert y Euler, cuyas ecuaciones han llegado hasta la actualidad. A pesar de la magnitud de esta teorización, de la misma se derivaba que la resistencia de un cuerpo en un fluido era nula, hecho contrario a la experiencia y que un contrariado d'Alembert propuso como una paradoja a los geómetras. La diferencia fundamental entre ambas concepciones estriba en que las teorías del impacto suponen una mecánica de choques de partículas discretas, mientras que en la otra trata al fluido como un cuerpo continuo en movimiento currentilíneo¹⁶. Matemáticamente en la primera domina la mecánica de cuerpos discretos y en la segunda la diferencial. Desde el punto de vista de la resistencia, en la primera las condiciones locales sólo dependen de las condiciones del punto respecto a la corriente libre, en tanto que en la segunda cada punto es función de la totalidad del cuerpo. Hay que subrayar que de acuerdo con las concepciones de la época, la teoría de las partículas tenía un trasfondo físico, ya que se suponía al aire y líquidos formados por partículas, mientras que eso no sucedía en las continuas cuya naturaleza era más abstracta. Al final este modelo se ha mostrado mucho más fructífero que el primero y es el que ha sustentado toda la mecánica de los fluidos hasta la actualidad.

2. ESTRUCTURA DE LA OBRA

El *Examen marítimo* consta de dos volúmenes *in quarto*, el primero de carácter general y el segundo de aplicación. Ambos volúmenes son muy diferentes entre sí, tanto por su contenido como por su estructura interna. Así, el primero, a su vez dividido en dos Libros, está ordenado en capítulos en los que se encadenan proposiciones, definiciones con corolarios y escolios, axiomas, principios de experiencia, y ejemplos¹⁷. En su conjunto sigue una pauta similar a los *Principia* de Newton. Por el contrario, el segundo, aunque también está capitulado, tiene todos los párrafos numerados, más al estilo de los obras navales de Bouguer o Euler. Es plausible conjeturar que ambos volúmenes fueron preparados en épocas distintas e, incluso, con propósitos también diferentes.

El primer libro del Volumen 1, que subtitula como «De Mecánica», es un tratado de mecánica general, que se inicia en sentido newtoniano y termina con una dinámica del sólido en la que se incluyen las aportaciones de Euler. Ya en el mismo, en el capítulo dedicado a la fricción, aporta una teoría propia que contrapone a Amontons,

¹⁵ *Hydraulica*, Ginebra, 1742.

¹⁶ Véase al respecto el prólogo de Manuel Sellés a la *La génesis de la mecánica de los fluidos*.

¹⁷ Limitándonos al Libro II, éste se extiende en 219 páginas, en trece capítulos con un total de 405 párrafos. Estos encierran 85 proposiciones con 261 corolarios y 53 escolios, además de tres lemas y otras tres definiciones. A esto se añaden dos apéndices.

Billfinger y Euler. Nuestro interés se centrará en el Libro segundo, del que afirma que «encierra el tratado de los fluidos» y que consecuentemente subtitula «De los Fluidos» [Pról. xxxiii]. En éste comienza con un capítulo introductorio dedicado a las definiciones básicas y a la hidrostática. Sigue con el establecimiento de su teoría de la resistencia, que es el cuerpo teórico fundamental sobre el que se asienta el resto de la obra [Cap. 2]. Continúa con su aplicación a superficies, tanto planas [Cap. 3] como de cualquier forma [Cap. 4], y con la introducción de lo que denomina las desnivelaciones, que, como veremos, juegan un papel importante en todas las aplicaciones. El paso siguiente es la extensión de la teoría a cuerpos flotantes, en los que estudia la generación de las fuerzas horizontales y verticales [Cap. 5 y 6], así como los efectos de interferencia entre desnivelaciones [Cap. 7]. Una vez establecida la resistencia que padece un cuerpo, pasa a buscar cómo minimizarla dando al cuerpo las formas geométricas adecuadas [Cap. 8]. Termina el tratado de las resistencias analizando el movimiento de un cuerpo sometido a la resistencia como una fuerza global [Cap. 9]. Como continuación de las resistencias sigue con los momentos [Cap. 10], tanto en cabeceo como en balanceo, y además en los supuestos de cuerpo móvil o inmóvil. Esto lo complementa con su aplicación a la dinámica de un cuerpo [Cap. 11], de forma paralela a lo que había hecho para la resistencia. Tras esto analiza los momentos que aparecen cuando el cuerpo gira sobre un eje cualquiera, que hoy denominaríamos de amortiguamiento [Cap. 12], para luego pasar a su aplicación [Cap. 13]. Este capitulado lo completa con dos anexos: uno dedicado a la teórica de las cometas y otro a comentar los resultados de los experimentos de Smeaton.

De forma general, su planteamiento se estructura primero en una teoría, que una vez establecida aplica a cuerpos, tanto para hallar las fuerzas como los momentos, y finalmente analiza la dinámica de los mismos. Además en cada caso las aplicaciones las complementa particularizándolas a cuerpos geoméricamente simples como prismas o cilindros, aunque la idea del buque está siempre presente como trasfondo de sus inquietudes.

En nuestros comentarios alteraremos su orden de presentación. Comenzaremos por los análisis teóricos, complementados, como hace Juan, con los efectos de las desnivelaciones en la superficies. Continuaremos con la generación de fuerzas sobre placas planas tras los que pasaremos a los cuerpos, tanto en lo referente a fuerzas como a momentos, a lo que se unirá los efectos de interferencia entre superficies y desnivelaciones. También entramos en su estudio de las fuerzas sobre las velas y forma que adoptan éstas, aunque Juan lo trate en el segundo tomo, como aplicado a los buques. Puesto que insiste continuamente en la necesidad de la práctica, hemos dedicado una parte a lo que entiende por contrastación, en sus aspectos de experimentos y aplicaciones. Finalmente, se hace una indagación sobre los precedentes de su teoría.

3. HIDROSTÁTICA

A la hidrostática la trata únicamente en el primer capítulo del Libro II, que llama «Del equilibrio de los fluidos, y de la fuerza con que actúan en reposo». Comienza con la definición de Newton de lo que es un fluido, que rezaba: «Fluido es un cuerpo cuyas partes ceden a cualquier fuerza, y cediendo fácilmente se mueven entre sí»¹⁸. Indica que la «fuerza»¹⁹ que padece cualquier partícula ha de ser la misma en todas las direcciones, pues si no fuese así entraría en movimiento [Prop. 1]²⁰. Además esa fuerza es precisamente el peso de la columna de líquido cuya altura sea la profundidad a que la se encuentra la partícula [Prop. 2]. Asimismo, por la razón del equilibrio [Prop. 1], las fuerzas sobre una superficie cualquiera que encierre una parte del fluido han de ser perpendiculares a esa superficie [Prop. 4]. De ello sigue que dada una superficie elemental cualquiera (fig. 1), «la fuerza que padecerá el área diferencial LKMN en la dirección CD que le es perpendicular, estando el fluido en reposo, será = $m \times a \times LN \times NM$ » [Prop.5, Cor. 1], donde m es el peso específico y a la profundidad. Con simbología actual se expresaría como:

$$d\vec{F} = \rho g z d\vec{\sigma} \quad [1]$$

La expresión «diferencio-diferencial» la repetirá constantemente, y en nuestra terminología equivale a un elemento diferencial de superficie. Introduciendo la noción de presión como fuerza por unidad de superficie, la ecuación anterior se escribiría:

$$p = \rho g z \quad [2]$$

Sin embargo, Juan no emplea el vocablo «presión» con el sentido actual, y el de muchos de sus contemporáneos, sino que arrastra constantemente la expresión «la fuerza perpendicular que padecerá una diferencio-diferencial de superficie» [Prop. 11]²¹. Sólo hay una ocasión en que habla de la fuerza diferencial [Prop. 18]. No obs-

¹⁸ Cf. *Principia*, Lib. 2, Sec. 5.

¹⁹ En lo sucesivo emplearemos el término «fuerza» con su sentido actual, aun cuando para el mismo Juan emplea varias designaciones. Una revisión del Libro I pone de manifiesto su variada terminología al respecto, bien dando otros sentidos al vocablo fuerza, bien designándola con otras palabras. Esto era habitual en la época. En particular, destaquemos que cuando la fuerza produce un cambio de estado en la dinámica de un cuerpo la llama «potencia».

²⁰ Mientras no se advierta lo contrario, las referencias entre corchetes se referirán al Tomo I, Libro 2.

²¹ Juan tampoco emplea el término presión con nuestro sentido, sino que emplea este término en los choques entre cuerpos cuando después del mismo siguen unidos [Def. 36]. Sin embargo, en alguna ocasión se le escapa una interpretación más acorde con la actual, como cuando habla del movimiento de placas parcialmente sumergidas en fluidos, en las que queda un hoyo tras las mismas, y del que dice «que no se pretende que todo el hueco o cavidad carezca enteramente de presión...» [Prop. 18, Esc.].

tante, por facilidad de entendimiento nosotros utilizaremos el término presión en el sentido habitual, mientras no se preste a confusión.

Consecuencia de estas definiciones es el denominado principio de Arquímedes, que demuestra integrando los elementos de volumen verticales $\rho z dx dy$; dice «que las fuerzas $\rho z dx dy$ son otras tantas potencias que impelen al al cuerpo verticalmente hacia arriba» [Prop. 8].

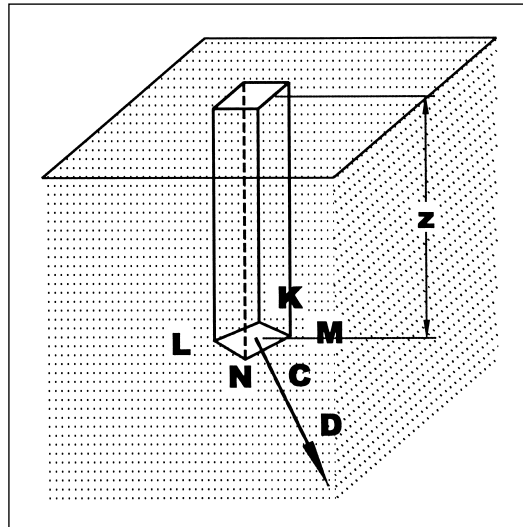


Fig. 1

4. TEORÍA BÁSICA

La teoría básica de la resistencia la establece en el Capítulo 2, que titula como «De la fuerza con que en el movimiento actúan los fluidos contra una diferencial de superficie» y que es fundamental en su obra. A continuación recorreremos cuidadosamente los pasos que sigue en este proceso para llegar a lo que denominaremos su teorema fundamental, o fórmula básica.

* Primero enuncia [Prop. 9] el hoy denominado teorema de Torricelli, pero sin darle ese nombre, según el cual la velocidad de salida de un fluido por un orificio infinitamente pequeño de un depósito vale $v_z = \sqrt{2gz}$, siendo z la profundidad del líquido. Juan intenta demostrar este teorema identificando la velocidad

de caída desde una altura z con la que tendría una partícula sobre la que actuase una columna de agua de espesor también z . Además, como según la hidrostática la fuerza sobre una partícula del líquido es igual en todas las direcciones, concluye que esa velocidad de salida será igual sea cual fuere la dirección que tuviese el orificio de salida [Prop. 9, Cor.]. No obstante, reconoce que en la práctica la velocidad es menor, dada «la fricción que debe resultar en el choque de las partículas del fluido con los lados del agujero; y aun de las que precisamente han de producirse en el choque de unas partículas con otras, aun antes de llegar a salir por el mismo agujero» [Prop. 9, Esc.].

* En segundo lugar, y tal como hemos visto, la fuerza que el fluido ejerce sobre un elemento de superficie $d\sigma$ es $dF = \rho g z d\sigma$. Si en esta ecuación se sustituye la profundidad z por la velocidad v_z , se obtiene la siguiente expresión [Prop. 10]:

$$dF = \frac{1}{2} \rho v_z^2 d\sigma \quad [3]$$

Esta fórmula sigue siendo cierta, pues v_z es un parámetro ligado a la profundidad, que denominaremos «velocidad sumersa», y que correspondería a la velocidad virtual con que efluiría el líquido a esa profundidad si esa efluencia fuese posible²². Queda patente cómo la presión estática queda referida a una velocidad que aun siendo virtual tiene un origen gravitatorio.

* Su tercer paso es básico y en él descansa toda la teoría. Juan supone un elemento diferencial de superficie situado a una profundidad z que se desplaza horizontalmente en el seno del fluido con una velocidad v . Como hemos visto, si ésta fuese nula y se perforase un orificio, el fluido saldría con la velocidad sumersa v_z (fig. 2a). Ahora bien, piensa Juan, como el elemento se mueve a una velocidad v , la velocidad de salida debería ser la suma de la sumersa más la de avance, esto es $v_z + v$ (fig. 2b). Por tanto, y a la luz de lo expresado en la ecuación [3], la fuerza que se ejerce sobre el elemento de superficie sería:

$$dF = \frac{1}{2} \rho (v_z + v)^2 d\sigma \quad [4]$$

De forma similar, sobre la superficie trasera la velocidad sería la diferencia en vez de la suma (fig. 2c), y la fuerza valdría:

²² En la época fue muy frecuente el emplear la altura z como medida de la velocidad. Por esta razón, en *La génesis de la mecánica de los fluidos*, denominamos altura cinética de una velocidad a la altura necesaria desde que habría que soltar un grave para que adquiriese esa velocidad. En este caso, z sería la altura cinética de v_z .

$$dF = \frac{1}{2}\rho(v_z - v)^2 d\sigma \quad [5]$$

Vemos que tanto en esta como en la anterior, Juan vuelve a las fuerzas por intermedio de las nuevas velocidades. En forma de presión se expresarían como:

$$p = \frac{1}{2}\rho(v_z \pm v)^2 = \frac{1}{2}\rho v_e^2 \quad [6]$$

Donde v_e sería el valor eficaz de la velocidad. Por otra parte, sustituyendo la velocidad sumersa por su valor en función de la profundidad se llega a:

$$p = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{2gz} \pm v)^2 \quad [7]$$

Expresión que, salvo la introducción de la presión, se asemeja a cómo la emplea Juan en todo el *Examen*, ya que siempre arrastra la profundidad de forma directa²³.

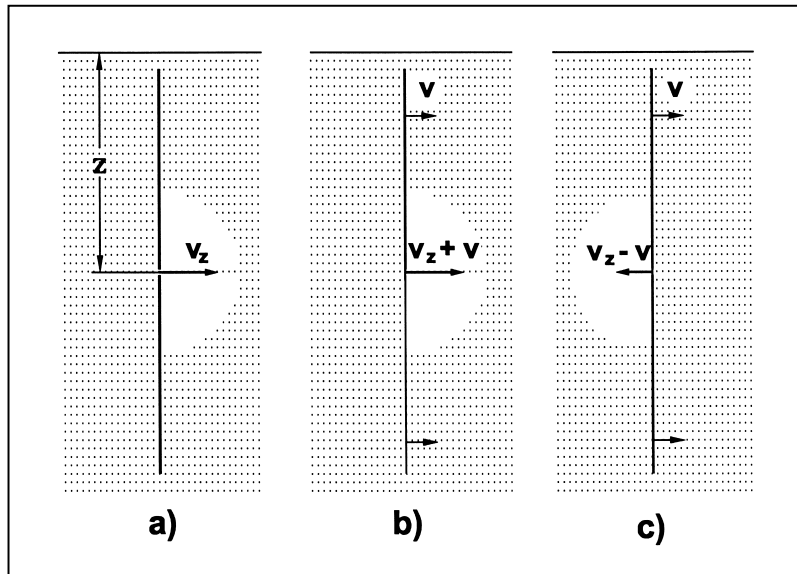


Fig. 2

²³ La expresión exacta que emplea es $m.LN.NM.(1/8 \sqrt{\chi} u)^2$. Donde m es el peso específico, LN y NM los lados del elemento, a la profundidad y u la velocidad. El valor $1/8$ proviene de que sus fórmulas no son dimensionales sino que trabaja con medidas inglesas, en las que la aceleración vale 32 pies/s^2 .

Vistos estos pasos, queda claro que Juan concede carácter real a la velocidad sumersa, a la que suma o resta a la velocidad de avance del elemento. Esto lo asevera explícitamente cuando dice que «la velocidad relativa será $v_z \pm v$: más en el caso de moverse la superficie contra el fluido, y menos en el de apartarse o huir de él» [Prop. 11]. Y más claro aún cuando más adelante, al contrastar su hipótesis con las habituales en la época, afirma que para llegar a esas fórmulas «el principio que nos condujo fue haber deducido que la velocidad con que saldría el fluido por la misma diferencia-diferencial, si tuviera libre pasaje, fuera $\sqrt{2gz + v_n}$ » [Prop. 36, Esc.]. Con parecida claridad se expresa en otros puntos del *Examen* [p.e. Prop. 47]. Apreciemos que Juan interpreta la situación estática como si fuese dinámica, por intermedio de la velocidad sumersa, la cual se ve modificada por el movimiento revertiendo a la condición estática primera. Si bien nosotros interpretamos a la velocidad sumersa como virtual, él la considera como real.

Caso complementario es aquél en que la velocidad no incide perpendicularmente sobre la superficie, sino que lo hace con un cierto ángulo θ . En esta circunstancia en la fórmulas anteriores sustituye la velocidad por la componente normal (fig. 3), esto es $v_n = v \text{sen } \theta$, resultando:

$$p = \frac{1}{2} \rho (\sqrt{2gz} \pm v_n)^2 = \frac{1}{2} \rho (\sqrt{2gz} \pm v \text{sen } \theta)^2 \quad [8]$$

Juan utiliza la segunda de las expresiones, aunque nosotros preferimos la primera por mor de la sencillez.

Ya sentadas estas fórmulas, Juan juega con ellas en el sentido de aplicarlas a elementos de superficie inclinados para obtener la fuerza total que se produce sobre los mismos, así como las componentes según direcciones determinadas. La casuística es larga y farragosa, siendo a veces difícil de seguir, tanto por las derivaciones como por la simbología. Todas estas particularizaciones tienden a facilitar el manejo de las fuerzas que se producen sobre las cuadrículas de superficie que resultan al dividir el casco de un buque, cuando se le corta por un conjunto de planos paralelos a su eje longitudinal (fig. 4).

En este punto, ya conocidos los fundamentos de su teoría, podemos comprender el papel que tiene la gravedad en la misma a través de v_z . A este respecto, cuando critica ideas de otros autores dice:

en las teóricas expuestas [de otros autores] no se supone el fluido sino destituido de toda gravedad, y por consiguiente de toda presión de unas partículas respecto a las otras; lo que no cabe, ni en nuestro aire, ni en nuestras aguas: estos fluidos, cuando la velocidad de los cuerpos no es muy grande, impelen éstos por detrás con la fuerza que de su gravitación les queda, lo que también reconoció el mismo Newton, y por consiguiente se disminuye la resistencia; al contrario, si la velocidad es grande, no tiene tanto lugar la gravitación para actuar detrás, y la resistencia debe ser a proporción mayor. [Pról. xxi-ss].

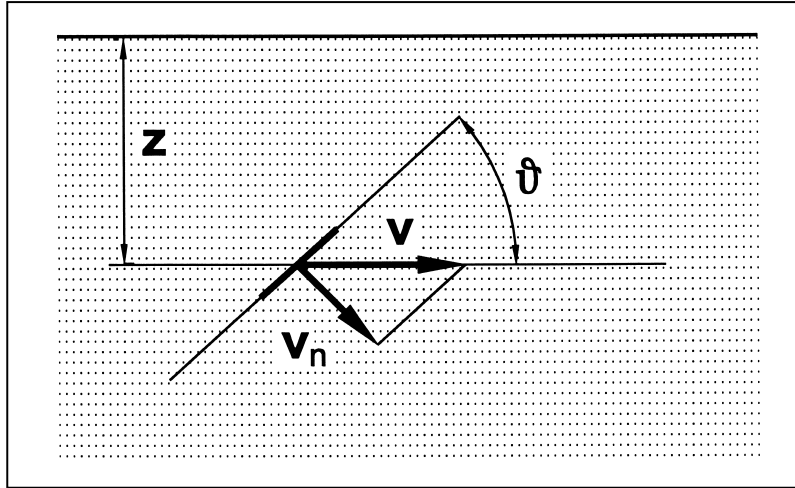


Fig. 3

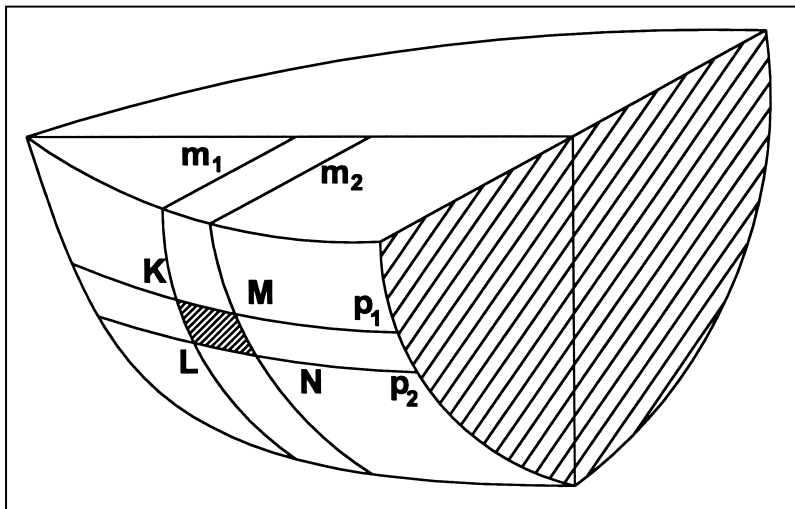


Fig. 4

Esta crítica tiene su justificación en que las teorías de la época servían de poco al aplicarlas al buque, el cual era el objeto principal de su interés. Si, como hemos conjeturado, Juan concibió el *Examen* alrededor de 1750, la teoría al uso era la del im-

pacto, cuyo modelo explicativo consistía en suponer el fluido formado por partículas independientes, sin interacción entre sí, que chocaban y rebotaban, total o parcialmente con el cuerpo, transfiriéndole parte de su cantidad de movimiento. Este modelo implicaba una acumulación de partículas en la zona delantera y un vacío en la trasera, y si bien esto pudiera tener alguna verosimilitud en el caso del aire, no tiene ninguna en el agua. Ante ese hueco trasero, unos autores lo ignoran pero otros buscan alguna explicación, tal como Benjamin Robins²⁴, Euler²⁵ o Bouguer²⁶. Newton, según recuerda Juan [Pról. xxii], reconoce que el fluido tiende a rellenar ese hueco, aunque sólo estima que esta operación disminuirá la resistencia²⁷. La acción de ocupación la atribuye Juan a la gravedad que posee el agua, de la cual una parte se transfiere al cuerpo en la parte delantera y el resto tiende a rellenar la parte trasera. Por eso dice que cuanto más rápido es el movimiento menos gravedad queda para atrás, esto es, el hueco es mayor, como enseña la experiencia. Si bien, en favor de las críticas de Juan, hemos de decir que en un cuerpo completamente sumergido está justificada la separación entre las fuerzas gravitatorias del resto si las dimensiones del cuerpo son pequeñas²⁸, para un buque no lo es tanto, dada la existencia de una superficie de discontinuidad, que es el nivel del agua, cuya evolución está muy determinada por las fuerzas gravitatorias, tanto en la formación de olas como en la de las estelas. Una y otra son básicas en el interés de Juan.

En las teorías del impacto, y las posteriores, las fuerzas sobre un móvil son debidas a alteraciones de la corriente producidas por la presencia del objeto, y como consecuencia de estas alteraciones hay cambios en la cantidad de movimiento, de lo cual resultan fuerzas locales. Frente a éstas, las fuerzas en reposo se deben únicamente al peso de la columna hidrostática. Juan considera que unas y otras tienen el mismo origen, y su teoría, como veremos, se podría interpretar que se dirige a corregir la altura de esa columna en función de la velocidad.

Para justificar su teoría frente a la de otros geómetras, Juan introduce un largo escolio en el que cita a Walis en sus *Obras matemáticas*, a Euler en la *Scincia navalis*, a Daniel Bernoulli en los *Commentarii Petropolitanae*, y a Newton en los *Principia*. No entraremos en detalles, sólo mencionaremos que en defensa de su teoría aduce: «por

²⁴ Cf. *New principles of gunnery*. Sobre esta obra volveremos al buscar antecedentes a las ideas de Juan.

²⁵ Euler en su «Recherches sur l'effet des moulins à vent», en las *Mémoires de l'Académie* de Berlín, 1756, establece la formación de un vacío parcial en la parte trasera de los cuerpos.

²⁶ Cf. *Traité du navire* Lib. III, Sec. V, Cap. VII. Bouguer utiliza la teoría del impacto en sus cálculos de la resistencia de la proa, pero tiene que establecer una serie de hipótesis adicionales para explicar el movimiento del fluido en la popa, que de forma elemental suponen que el fluido tiende a caer para ocupar el hueco hipotéticamente dejado en el avance.

²⁷ En realidad, Newton en los *Principia* sólo trata este hecho indirectamente al hablar de los efectos de un cilindro con una proa carenada, cf. Prop. XXXVII, Esc.

²⁸ En mecánica de los fluidos la validez de esta separación para las fuerzas convectivas está regulada por el número de Froude si se hace abstracción de las fuerzas viscosas.

muy simple que sea la teórica que hemos empleado, no dejará de combatirse con muy sólidos fundamentos, si la práctica no nos la verificara por cuantos medios se proporcionan». [Prop. 17, Esc.] Después, al final de sus comentarios, termina escribiendo:

Cuán lejos se estaba de llegar al verdadero conocimiento de las fuerzas por los caminos que hasta ahora se han conducido, se hará aún más evidente cuando por nuestra teórica se vea demostrado, que las resistencias no siguen, ni la ley de las simples velocidades, ni la de los cuadrados, sino que varía según las circunstancias, y disposición de las superficies impedidas en los fluidos. [*Ibid.*]

5. FLUIDO MÓVIL

Los fundamentos expuestos de su teoría suponen que la superficie resistente se mueve en un fluido en reposo. Para abordar el caso contrario, cuando el cuerpo está inmóvil y el fluido en movimiento, parte de la existencia previa de una corriente fluida cuyo movimiento se genera por una inclinación de la misma (fig. 5), como si se tratase de un canal con pendiente, aunque en sus textos no haga ninguna referencia a este hipotético canal. Vemos que Juan también hace responsable a la gravedad de este movimiento, aunque posteriormente, pensando en las corrientes horizontales, no descarta que haya otros mecanismos para producir corrientes fluidas.

Reproducimos su esquema en la citada fig. 5, que muestra una corriente cuya superficie está inclinada respecto a la horizontal, como podría ser la de un canal como hemos apuntado, y de la que afirma que la velocidad es constante. Sin embargo, con tal esquema la corriente se aceleraría, por lo que intenta una justificación. Para ello toma una partícula *B* situada a una profundidad *z*, medida según la vertical. La acción de la gravedad la descompone en sus componentes normal y longitudinal respecto al nivel de la corriente, que serán respectivamente $g \sin \omega$ y $g \cos \omega$. Afirma que «Por la primera debe de quedar en equilibrio el fluido, y por la segunda acelerar su velocidad» [Prop. 15]. Ahora bien, como la velocidad es constante afirma «que por precisión hay una fuerza o potencia en dirección opuesta que destruye a la fuerza que actúa según *AD* [paralela a la superficie]» [*Ibid.*] No explica nada sobre la naturaleza de esta fuerza, sólo reconoce que tiene que existir, como dice: «Si un fluido se mueve en virtud de su propia gravedad, y toma una velocidad constante, parte de la acción de cada una de sus partículas queda destruida por una fuerza cualquiera» [*Ibid.*]. Esta fuerza cualquiera es un subterfugio que Juan introduce, ya que sus conocimientos le indican que la velocidad no puede ser constante. Este proceder no era extraño en la época, ni quizás en las posteriores, y pone de manifiesto cómo se intenta acomodar la realidad a los modelos, y más aún a las leyes generales de la naturaleza.

Si en esa corriente se coloca una superficie resistente inmóvil, Juan entiende que de las fuerzas gravitacionales sólo la afectará la componente $g \sin \omega$ pues la otra se ha

de destruir como ha dicho. En estas circunstancias, para calcular la velocidad sumersa v_z con que saldría una partícula, estima que ésta recorrerá la distancia $EB = z \operatorname{sen} \omega$ con la antedicha componente de la gravedad $g \operatorname{sen} \omega$. Por tanto esa velocidad sería:

$$v_{zm} = v_z \operatorname{sen} \omega = \sqrt{2gz} \operatorname{sen} \omega \quad [9]$$

Con esta última la presión de salida antes expresada en [8], ahora será:

$$p = \frac{1}{2} \rho (\sqrt{2gz} \operatorname{sen} \omega \pm v_n)^2 \quad [10]$$

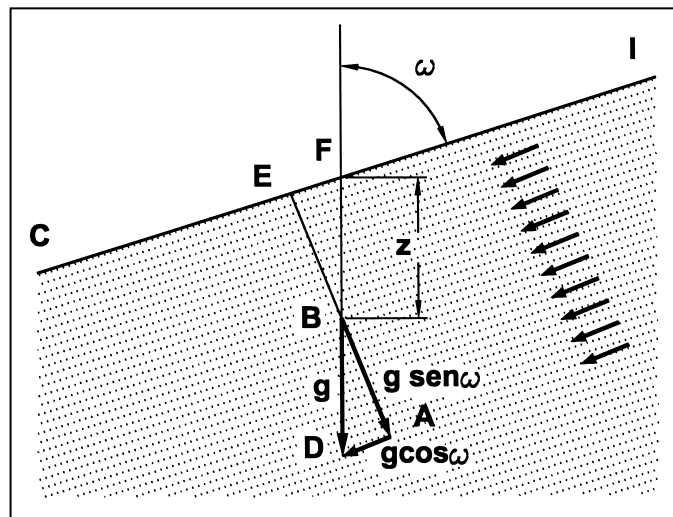


Fig. 5

Estas fórmulas muestran que las fuerzas sobre el cuerpo son diferentes cuando éste es el móvil o cuando lo es la corriente, aun siendo igual la velocidad relativa en ambos casos. A la vista del desarrollo, apreciamos que ello se debe a la hipótesis de que la corriente se genera por la inclinación ω , que hace que la velocidad sumersa disminuya por el factor $\operatorname{sen} \omega$. Ante la opinión contraria, que es la generalizada entre los autores de la época, Juan arguye: «pero no es así, en caso de moverse el fluido: su movimiento depende de la desnivelación, y por consiguiente ya no es perpendicular a su superficie la dirección, según la cual gravitan las partículas del fluido» [Prop. 16]. No obstante, como ya hemos advertido, Juan no descarta la posibilidad de corrientes

en movimiento horizontal, y en este sentido afirma que «si el fluido se moviere horizontalmente será $sen\omega=1$, y las fuerzas se reducirán a las mismas que cuando el fluido se halla parado, y se mueve la superficie chocada; por lo que en este caso sólo corresponde bien el principio, generalmente recibido, de que lo mismo es, para el efecto, que se mueva la superficie, que el fluido» [Prop. 16, Cor. 1]. Juan entiende este caso como una particularización del general.

Finalmente, cuando son ambos los que se mueven introduce lo que denomina «la velocidad compuesta de las dos» [Prop. 17], que sustituirá a v_n .

6. DESNIVELACIONES

Una consecuencia interesante de su teoría es la deducción analítica de lo que denomina «desnivelaciones» o «entumescencias». Éstas son la elevación del líquido que se produce en la parte delantera y la depresión en la trasera de un cuerpo cuando éste se mueve. El estudio de este fenómeno es una de las contribuciones más singulares de su teoría. Sobre ellas dice: «estas desnivelaciones son las que se notan diariamente en los cuerpos que se mueven en los fluidos» [Prop. 18, Esc.]. Para su estudio, Juan supone una placa plana (fig. 6) que avanza parcialmente sumergida en un fluido produciendo dichas entumescencias, la primera como una elevación en la cara impelente, la otra como una depresión en la impelida. La existencia de estos dos fenómenos son para él consecuencia de su teoría, y en concreto de la ecuación [7] que relaciona la presión con la velocidad y profundidad. Si esta ecuación se iguala a cero buscando los puntos en que la presión es nula, se obtienen dos soluciones:

$$\sqrt{2gz} = v_n; \quad \sqrt{2gz} = -v_n \quad [11]$$

La primera de estas igualdades indica la profundidad del punto E en la cara impelida:

en el que la superficie se aparta o huye del fluido,.. aún antes de ser $z=0$,...; por lo que en este punto E la fuerza diferencial [es] $\{ \} = 0$, y por consiguiente ya no choca o comprime el fluido, como tampoco a ninguno de los puntos más arriba de E : con que debe formarse en el espacio CPE la cavidad CEP . [Prop. 18]²⁹

²⁹ En este punto es uno de los pocos en que habla de la fuerza diferencial, concepto equivalente al de la presión actual.

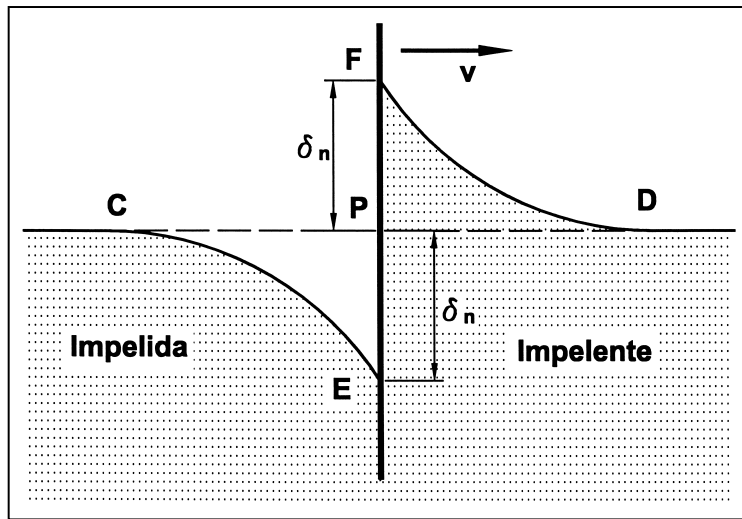


Fig. 6

En la anterior cita Juan coloca entre corchetes una expresión equivalente a la [8]. La magnitud de este hundimiento será:

$$\delta_n = \frac{v_n^2}{2g} \quad [12]$$

La segunda igualdad es matemáticamente insoluble en el campo de los números reales dado el signo negativo del segundo miembro. Ahora bien, Juan dice «cuyo signo negativo manifiesta que el punto a que esto corresponde está a la parte de arriba de P origen de z» [Prop. 18]. Esto es:

$$\delta_n = -\frac{v_n^2}{2g} \quad [13]$$

Pese al carácter aparentemente intuitivo de este argumento, la situación no es tan clara cuando se intenta extraer el sentido físico del fenómeno, incluso dentro de su propia teoría. Sea la placa representada en la fig. 7, según su razonamiento en un punto cualquiera de la cara impelida, más bajo que la desnivelación, la presión es función de la diferencia entre la velocidad sumersa v_z y la de avance v . Ambas se igualan en el punto E, dando por tanto una presión resultante nula, que justificaría la

existencia de una entumescencia entre E y C . Hay, no obstante, un punto débil: la velocidad sumersa tiene su origen en la existencia de una capa de agua entre el punto en cuestión y la superficie, en tanto que en el punto E , esa profundidad es nula, luego poco sentido físico tiene ahí v_z .

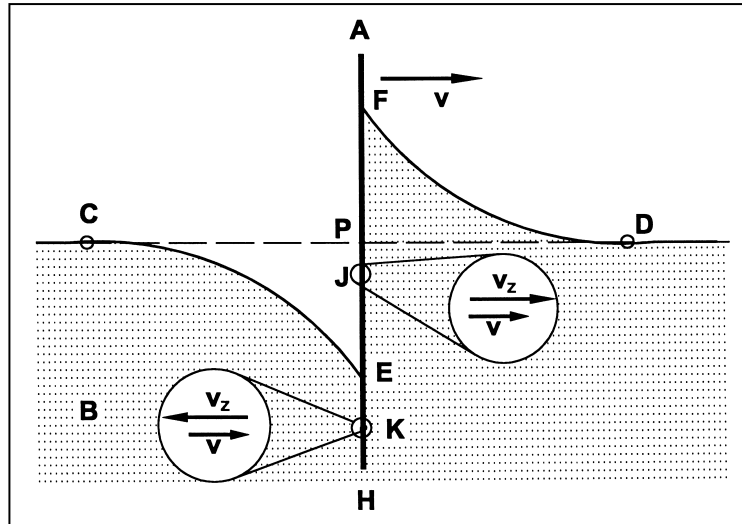


Fig. 7

Más difícil aún es la interpretación en la cara impelente. En un punto J las velocidades se sumarían, y para que esta suma sea nula en el punto F se precisa que por encima de la superficie la velocidad cambie de signo y sea creciente. Esto significaría que en P la velocidad v_z sea nula, aun cuando tiene una capa FP de agua encima, y que en F sea contraria y de un valor absoluto igual al que tendría bajo una profundidad FP . La solución, repetimos, corresponde al desarrollo matemático de sus fórmulas, pero en sentido físico, el mismo que él le ha dado al fenómeno, la situación es absurda y contradictoria.

A pesar de esto, trataremos de ver a qué presiones corresponden sus fórmulas, aunque con ciertos arreglos en cuanto a los signos para evitar valores negativos subradicales. En la fig. 8 se representan las presiones en abcisas y las profundidades en ordenadas, en sentido positivo hacia abajo. Para la cara impelida, la expresión de la presión corresponde al signo negativo de [8], que es:

$$p = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{2gz} - v)^2 \quad [14]$$

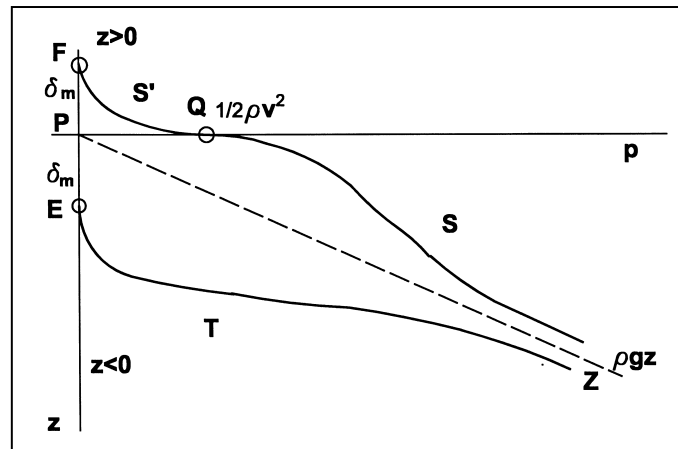


Fig. 8

Se representa por la curva T en dicha figura, que se inicia en el punto E ($z = \delta_m$) tangente al eje de ordenadas. Esta curva tiene como asíntota PZ , que es la recta $p = \rho gz$ que corresponde a la presión estática. Para la superficie impelente en la zona por debajo del nivel del agua, $z > 0$, la expresión toma el signo positivo, esto es:

$$p = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{2gz} + v)^2 \quad [15]$$

Que se representa como curva S . Ésta comienza tangente en el punto Q ($p = 2\rho v^2$) y también tiende a la misma asíntota. Para la parte superior, con $z < 0$, con los signos apropiados pero manteniendo sus hipótesis, la presión sería:

$$p = \frac{1}{2}\rho(\sqrt{-2gz} + v)^2 \quad [16]$$

De la que resulta la curva S' , que va desde F ($z = -\delta_m$) a Q , con tangencia a los ejes en ambos puntos. Juan no calcula explícitamente las presiones de esta forma, sin embargo, todas las integraciones que realiza posteriormente se corresponden con estas distribuciones.

Para hallar la forma geométrica de las desnivelaciones afirma (fig. 9) que:

El hueco CEP , y la elevación DFP son iguales y semejantes: y las curvas CE , DF que terminan el fluido son ambas parábolas del primer género, cuyo parámetro es $2g\text{sen}^2\omega$; y sus ejes verticales CB , DB , distantes del punto P la cantidad $CP = PD = v\text{sen}\omega$. [Prop. 19]

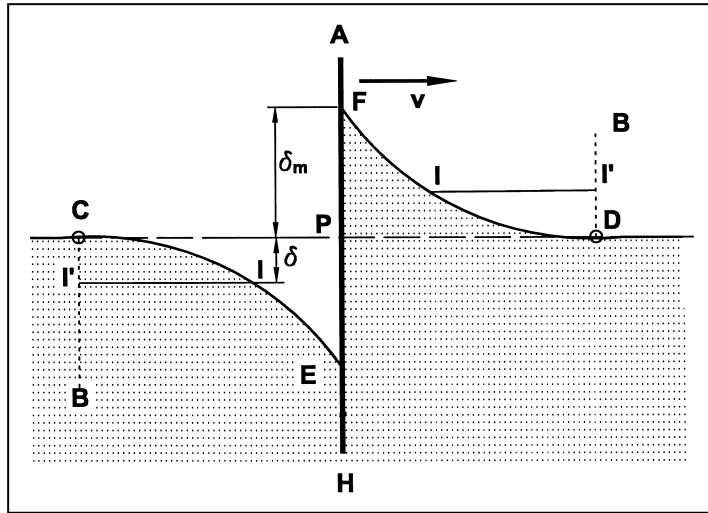


Fig. 9

Esto es, dos parábolas simétricas respecto al punto P cuyos vértices están en D y C . Sorprende que defina las distancias CP y PD como una velocidad. Conjeturamos que Juan quiere decir que esas distancias son el espacio recorrido en un segundo, que él escribe como $v\text{sen}\omega$ y que no lleva explícitamente el tiempo por ser éste la unidad, lo cual se explicaría por la falta de coherencia de su sistema de unidades³⁰. Esto se justificaría en el párrafo siguiente cuando dice: «y que la superficie AH [la placa] pase en un tiempo determinado de CB a AH, o de AH a DB» [*Ibid.*]. No explica que ese tiempo sea precisamente un segundo. Por nuestra parte, manteniendo esta conjetura, para evitar incongruencias, indicaremos ese tiempo como τ , con lo que la distancia anterior sería $\lambda=v_n\tau$. Además afirma: «Todos los puntos o partículas del fluido, como I , puestos en la superficie de la curva, habrán andado en el mismo tiempo su ordenada correspondiente» [Prop. 19]. Por tanto ese tiempo es el que invertiría cualquier partícula de la superficie de la desnivelación en recorrer esa distancia; de lo que se sigue que la velocidad del fluido varía linealmente desde v_n en la placa, sea en F o en E , hasta su anulación en los vértices, D y C respectivamente. Juan supone que en I la velocidad es $\sqrt{(2g\delta)\text{sen}\omega}$, con lo que la ecuación de la curva es evidentemente una parábola, cuya ecuación será³¹:

³⁰ En este sentido siempre escribe 64 al referirse a $2g$, ya que con el sistema de unidades inglés, que es el que emplea habitualmente, resulta $g=32\text{ pies}/s^2$.

³¹ Se emplea un sistema de coordenadas centrado en el centro de la placa, en vez del suyo que lo está en cada uno de los vértices.

$$y = \frac{(\lambda - x)^2}{2g\tau^2} = \delta_m \left(1 - \frac{x}{\tau}\right)^2; \quad x \leq \lambda \quad [17]$$

En cuanto a la velocidad del fluido inducida por la placa, valdrá:

$$v_x = v_n \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)^2 = v_n - \frac{x}{\tau}; \quad x \leq \lambda \quad [18]$$

Ambas para la elevación delantera; para la trasera las expresiones serían equivalente con los cambios de signo necesarios.

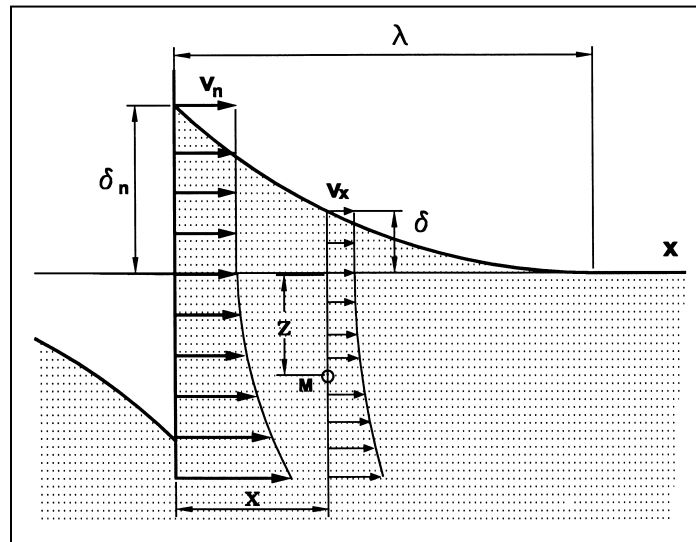


Fig. 10

Por tanto, de acuerdo con lo anterior, la placa perturba al fluido únicamente en una distancia entre $+\lambda$ aguas arriba y $-\lambda$ aguas abajo. Si bien no dice nada en cuanto a la velocidad en el interior de la desnivelación, es fácil suponer que será la misma que en la superficie, que es lo que se ha calculado. De esta forma tendremos que la placa induce una velocidad en la zona $\pm\lambda$ que varía linealmente entre v_n en la superficie de contacto con la placa hasta cero en el final de la desnivelación (fig. 10). Ahora bien,

esta distribución de velocidades implica que la placa ha de ser de anchura finita y que por sus bordes ha de pasar líquido de la parte delantera a la trasera, pues si no fuese así habría una acumulación en la primera. Juan no lo menciona explícitamente, aunque lo afirma cuando trata de justificar la acción de la gravedad como causante del proceso:

pero no se pretende que todo el hueco carezca enteramente de presión, ni toda la igual entumescencia quede completa, porque por los lados de la superficie se introduce o escapa el fluido, corriendo en dirección perpendicular al movimiento de la misma, y ocupa o desocupa parte del hueco o elevación que hemos deducido. [Prop. 18, Esc.]

Más adelante, cuando introduzca lo que hemos llamado interferencias entre superficies y desnivelaciones, cobrarán más sentido estas palabras.

7. FUERZAS EN PLACAS PLANAS

Tras el cálculo de las presiones ya se está en disposición de pasar a obtener la fuerza sobre la totalidad de la cara de una placa. Ello lleva a Juan a una casuística en cuanto a la mayor o menor inmersión de la placa en el fluido, lo cual afectará a la posición de los bordes respecto a las desnivelaciones. Las situaciones extremas se producirán cuando la desnivelación no sobrepasa el extremo de la placa (fig. 11a) y cuando está completamente sumergida (fig. 11b). En sus análisis supone casos intermedios, como cuando salta líquido por encima del borde ($a < \delta$), en los que no entraremos, puesto que nos limitaremos a los dos extremos citados por ser los más relevantes: el primero corresponde a la superficie impelente y placa parcialmente sumergida (fig. 11a), y el segundo cuando ésta está completamente sumergida.

En el primero de ambos, al integrar la ecuación [7] entre el borde más profundo de la placa y el límite de la desnivelación, teniendo en cuenta lo advertido sobre los signos, se llega a la siguiente expresión:

$$F_T = \rho g c \left(\frac{a^2}{2} + \frac{4v_n a^{3/2}}{3\sqrt{2g}} + \frac{v_n^2 a}{2g} + \frac{v_n^4}{6(2g)^2} \right) \quad [19]$$

En la que c es la anchura de la placa y a la profundidad sumergida, o más precisamente su proyección en el sentido de la medida de la fuerza. De los cuatro sumandos que constituyen la resistencia, el último es el ocasionado por la desnivelación que es independiente de la parte sumergida de la placa. Este término, según manifiesta Juan, se puede despreciar si la elevación es pequeña. El primero de los términos es la fuerza estática que soporta la placa y, por tanto, independiente de la velocidad. Los dos restantes son dependientes de la velocidad, uno lineal y otro cuadráticamente.

De forma similar, para la superficie impelida la fórmula resultante será:

$$F_T = \rho g c \left(\frac{a^2}{2} - \frac{4v_n a^{3/2}}{3\sqrt{2g}} + \frac{v_n^2 a}{2g} - \frac{v_n^4}{6(2g)^2} \right) \quad [20]$$

Que difiere de la anterior en los signo del segundo y del cuarto término.

Cuando la placa está completamente sumergida (fig. 11b), si se designa h a la profundidad entre el borde superior y la superficie del agua, la ecuación a la que se llega es la siguiente:

$$F = \rho g c \left[\frac{1}{2}(2ha + a^2) \pm \frac{4}{3} \frac{v_n}{\sqrt{2g}} [(h+a) - h^{3/2}] + \frac{v_n^2}{2g} \right] \quad [21]$$

En la que el signo positivo del segundo sumando corresponde a la superficie frontal y el negativo a la trasera. De forma similar al anterior, el primero de los sumandos corresponde a la fuerza estática, y los otros se corresponde con los de las velocidades, desapareciendo el debido a la desnivelación ya que ésta no existe.

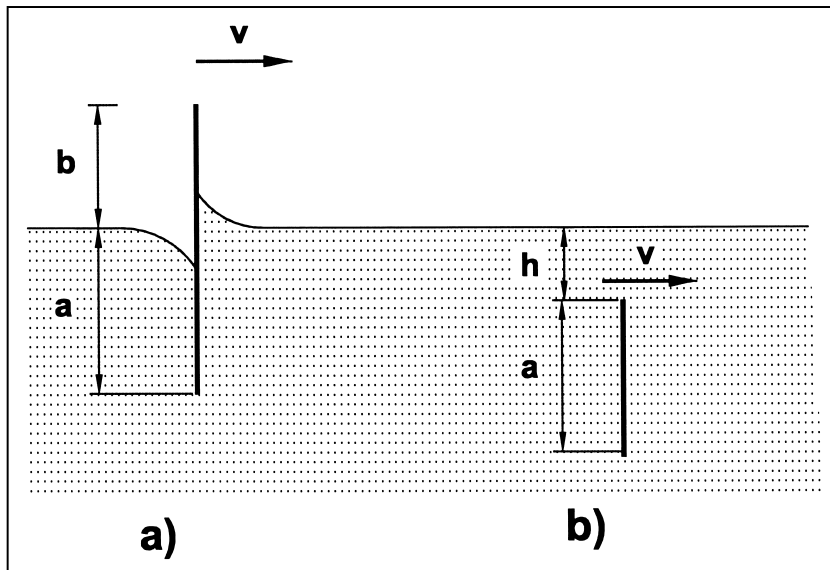


Fig. 11

Antes de continuar hagamos notar que las placas siempre las hemos presentado, para simplificar, en posición vertical, mientras que sus fórmulas corresponden a una situación más compleja, tanto en la posición como en la velocidad. Ésta, expresada como v_n o $v \text{sen} \theta$, proviene de la composición vectorial de las de la placa v_p y corriente v_c , siendo a y c la proyección de sus dimensiones sobre nuestros ejes z e y .

Para los supuestos en que sea el líquido el que se mueve, se ha de aplicar la fórmula de la presión dada en [10] en vez de la [7], que implica la inclusión del factor $\text{sen} \omega$. Resultan las siguientes expresiones:

$$F_T = \rho g c \left(\frac{a^2}{2} \text{sen}^2 \omega \pm \frac{4v_n a^{3/2}}{3\sqrt{2g}} \text{sen} \omega + \frac{v_n^4 a}{2g} \pm \frac{v_n^4}{6(2g)^2} \right) \quad [22]$$

$$F = \rho g c \left[\frac{1}{2} (2h + a^2) \text{sen}^2 \omega \pm \frac{4}{3} \frac{v_n}{\sqrt{2g}} [(h + a)^{3/2} - h^{3/2}] \text{sen} \omega + \frac{v_n^2}{2g} a \right] \quad [23]$$

Que ocuparían los lugares de las [19-21].

Es interesante repasar el análisis que hace Juan cuando la corriente es vertical y la placa está situada horizontalmente. Aborda el problema por dos caminos: uno extendiendo la hipótesis de corrientes inclinadas a la situación vertical con placa inmóvil (fig. 12a), y el otro con una placa ascendente en un fluido inmóvil (fig. 12b).

El primero de ambos deriva directamente de la sustitución $\omega = \theta$ en la ecuación [23], que la reducirá a la simple fórmula:

$$F = \frac{1}{2} \rho v_n^2 a c \quad [24]$$

Valor aplicable tanto para la superficie impelente como la impelida, hecho cuanto menos extraño, aunque explicable a la luz de su hipótesis sobre la generación de la velocidad sumersa en una corriente inclinada, que en este caso es nula, según la ecuación [9], y de lo que resulta la igualdad de las presiones en ambas caras [10].

Por el otro camino, cuando se mueve una placa horizontal hacia arriba, la presión sobre la misma será uniforme con la expresión general dada en [7]. Si la profundidad a que está la placa se la designa como h , la resultante será:

$$F = \rho g \left(\sqrt{h} \pm \frac{v_n}{\sqrt{2g}} \right)^2 a c \quad [25]$$

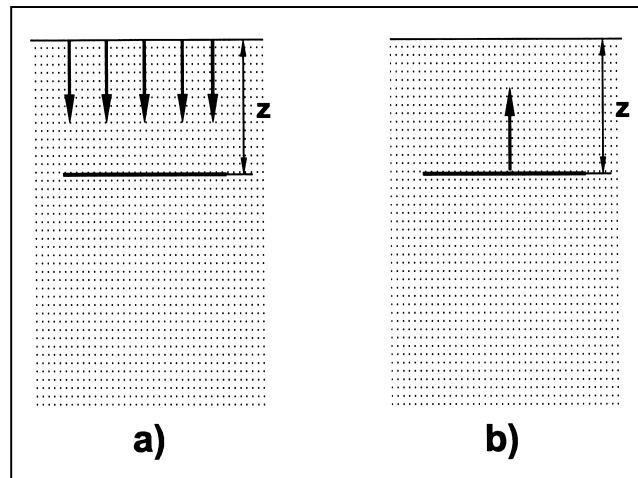


Fig. 12

El resultado sería el mismo si la velocidad fuese hacia abajo, con el consiguiente cambio de caras.

Ahora Juan particulariza para el caso en que la velocidad v_n coincidiese con la correspondiente a la altura cinética h , esto es $v_n=2gh$. En esta circunstancia la anterior ecuación se convierte en:

$$\begin{array}{ll}
 F = 4\rho ghac & \text{cara frontal} \\
 F = 0 & \text{cara trasera}
 \end{array}
 \quad [26]$$

La primera de estas dos ecuaciones indica que sobre la cara frontal, en este caso superior, actúa un peso igual a cuatro veces el de una columna de líquido de esa profundidad y superficie, mientras que en la trasera es nula, sobre lo que puntualiza «lo que se hace bien notorio con sólo reflexionar que el fluido no puede en este caso alcanzar la superficie» [Prop. 29, Cor. 2]. Esta explicación se entiende mejor si la placa en vez de moverse hacia arriba lo hiciese hacia abajo, en cuyo caso la cara frontal sería la inferior, y la velocidad sumersa coincidiría con la de caída, que es a lo que se refiere cuando dice que el fluido no alcanza la superficie.

Esta misma particularización la repite para el caso de corriente vertical, cuya fuerza estaba dada en la ecuación [24]. Resulta para ambas caras:

$$F = \rho ghac \quad [27]$$

Que es una vez el peso de esa columna.

De la comparación de ambas, y en concreto sobre la cara impelente, resulta que la fuerza es cuatro veces mayor en un caso que en el otro. Vista la disparidad entre ambos resultados, aduce «Aquí se ve claramente cuán distinto es que se mueva la superficie, o que se mueva el fluido... Sin embargo, no conozco Autor que no haya supuesto hasta ahora que es lo mismo lo uno que lo otro» [Prop. 29, Esc. 1].

Terminamos aquí las fuerzas sobre placas. Juan sigue con otro capítulo en el que repite sus argumentos aplicándolos a superficies curvas con varias particularizaciones. No entraremos en este tema, pues aparte de los desarrollos matemáticos no aporta nada conceptualmente nuevo.

8. FUERZAS Y MOMENTOS SOBRE CUERPOS

Juan afirma:

Las resistencias que padecen los cuerpos movidos en los fluidos, se reducen a la resulta de las fuerzas que padecen las superficies según una determinada dirección: o a la suma de todas las fuerzas según esta propia dirección, tomando positivas las que lo fueran, y negativas las que también lo fueren. [Prop. 35]

Dicho con otras palabras, la fuerza sobre el cuerpo es la resultante de la integración de las fuerzas diferenciales extendida a la superficie mojada con la inclusión de las desnivelaciones. De forma general esto se expresaría como:

$$\vec{F} \int_{\Sigma_m + \Sigma_d} d\vec{F} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_m + \Sigma_d} \rho \vec{v}_e^2 d\vec{\sigma} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_m + \Sigma_d} \rho (v_z \vec{n} - \vec{v})^2 d\vec{\sigma} \quad [28]$$

Donde Σ_m es la superficie mojada en reposo y Σ_d la correspondiente a las desnivelaciones, a su vez función de la geometría del cuerpo y de la velocidad, y n el versor normal a la superficie. La proyección de la fuerza resultante sobre la dirección OX es la resistencia, sobre el OZ la vertical y sobre el OY la lateral. Si el cuerpo es un sólido barquiforme con simetría lateral y la corriente es simétrica, la fuerza lateral resultante será nula, ya que un costado anulará al otro.

Recordemos que la teoría de Juan engloba la hidrostática como un caso particular, por lo que en los resultados también aparecerán las fuerzas y momentos estáticos.

Si bien teóricamente el proceso está muy claro, a la hora de llevarlo a la práctica es laborioso por las dificultades de cálculo. A continuación analizaremos separadamente varios supuestos de fuerzas y momentos, siguiendo, en cierta forma, la misma secuencia que Juan.

Resistencias de paralelepípedos

Comenzaremos, al igual que él, con un paralelepípedo flotante en movimiento horizontal. Sean sus dimensiones b , c y e , estando sumergido una profundidad a , tal como se muestra en la fig. 13. Si se aplican directamente las fórmulas ya obtenidas para las fuerzas sobre superficies en [19-21], la resistencia será la diferencia entre la fuerza en la cara impelente [19], que hace de proa, y la impelida [20], que lo es de popa, ya que no habrá fuerza alguna sobre las superficies laterales. Resulta:

$$F_X = 2\rho g c \left[\frac{4va^{3/2}}{3\sqrt{2g}} + \frac{v^4}{6(2g)^2} \right] \quad [29]$$

Si el cuerpo estuviese enrasado con la superficie, se anularía la desnivelación frontal pero no la trasera, con lo cual la expresión anterior se transformaría en:

$$F_X = 2\rho g c \left[\frac{4va^{3/2}}{3\sqrt{2g}} + \frac{v^4}{3(2g)^2} \right] \quad [30]$$

Que difiere de la anterior en el segundo término, el cual se ha duplicado. Si se despreciasen ambas desnivelaciones el resultado sería:

$$F_X = \frac{8\rho g c v a^{3/2}}{3\sqrt{2g}} \quad [31]$$

Del que dice «que expresa la resistencia en una sola cantidad, que será como las simples velocidades v » [Prop. 36, Cor. 4]. Este resultado contradice la hipótesis común entonces, y también ahora, de la proporcionalidad de la resistencia con el cuadrado de la velocidad.

Cuando el cuerpo está completamente sumergido, la resistencia se resuelve con la aplicación de [21], y que conduce a:

$$F_X = \frac{8\rho c v}{3} \sqrt{\frac{g}{2}} [(h+e)^{3/2} - h^{3/2}] \quad [32]$$

En donde h es la profundidad a que se encuentra la cara superior. Si además $e \ll h$, tal expresión se reduce a:

$$F_X = 2\rho c e v \sqrt{2gh} \quad [33]$$

En la que al igual que en una placa también hay proporcionalidad entre la resistencia y la velocidad [Prop. 40, Cor. 2].

En estos cálculos no ha influido para nada la longitud b del paralelepípedo, pues no se producen fuerzas sobre las caras laterales, de lo que se sigue «que sea dicho paralelepípedo largo o corto, según dicha dimensión, siempre padecerá la misma resistencia horizontal» [Cor. 5], lo cual insiste en que también será aplicable cuando dicha dimensión sea cero [Cor. 6]. A pesar de estas aseveraciones, más adelante, cuando evalúe las interferencias entre desnivelaciones [Cap. 7], se desdecirá de lo anterior e incluirá el efecto de la longitud en la resistencia, como veremos.

No entraremos ni en el caso en que inclina el paralelepípedo respecto a la horizontal un ángulo n , con lo que el fluido incidirá también en la superficie baja, ni tampoco en el de un cilindro que avanza en dirección perpendicular a su eje, siendo éste paralelo a la superficie.

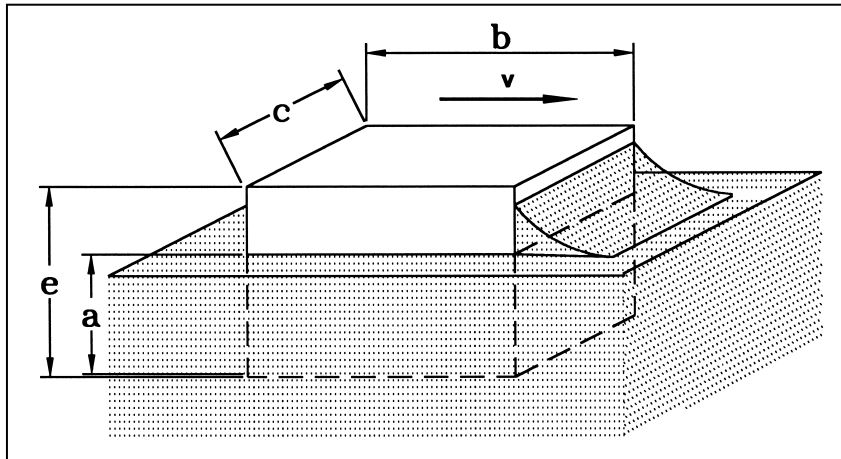


Fig. 13

Fuerza horizontal en un cuerpo cualquiera

Como aplicación de la teoría establece un procedimiento de cálculo que es una integración numérica, para lo cual se precisa un mallado de la superficie. Éstas serán las cuadrículas generadas por la intersección con el casco de dos juegos de planos paralelos a los planos XZ y XY [Prop. 43, Cor. 1] (fig. 14). Sobre cada cuadrícula se producirá una fuerza perpendicular cuya magnitud será el producto de la presión, según la ecuación [8], por la superficie de la misma. Esta fuerza es función única-

mente de sus dimensiones, profundidad y posición relativa a la velocidad incidente. Para la resistencia de una cuadrícula situada a una profundidad z y cuya dimensión en el plano YZ sea Δy y Δz nos presenta la componente en la siguiente forma:

$$\Delta F_x = \rho g \Delta y \left[z \Delta z \pm \frac{4}{3} \frac{v_n}{\sqrt{2g}} \left[\left(z + \frac{\Delta z}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(z - \frac{\Delta z}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{v_n^2 \Delta z}{2g} \right] \quad [34]$$

El signo más corresponde a la cuadrícula de la proa y el menos a la de la popa. La fuerza total es la diferencia entre la de proa y popa, que si la velocidad normal primera es v_{n1} y la otra v_{n2} y se considera además que $\Delta z \ll z$ resulta:

$$\Delta F_x = \rho \left[\sqrt{2gz(v_{n1} + v_{n2})} + \frac{1}{2}(v_{n1}^2 - v_{n2}^2) \right] \Delta y \Delta z \quad [35]$$

Fórmula análoga a la hallada por Juan [Prop. 43, Cor. 1 y 2] si se sustituyen las velocidades normales respectivamente por $v \text{sen} \theta_1$ y $v \text{sen} \theta_2$.

La simplificación de ésta ecuación en el caso de simetría entre la proa y popa conduciría a [Cor. 5]:

$$\Delta F_x = 2\rho \sqrt{2gz} v_n \Delta y \Delta z = 2\rho v \sqrt{2gz} \text{sen} \theta \Delta y \Delta z = 2\rho v_n v_z \Delta y \Delta z \quad [36]$$

Fórmula sencilla, aunque advierte que para llevar a cabo el cálculo en forma correcta hay que «hacer atención a la desnivelación del fluido [por lo que] se calcularán las fuerzas que padecen las cuadrículas anteriores o impelentes, a las cuales alcanza la elevación o entumescencia del mismo fluido» [Cor. 5, Esc.]. El cálculo riguroso para integrar esta ecuación es complicado aun con la simplificación de la simetría, por lo que Juan la vuelve a simplificar en el sentido de que «se puede suponer que todas las cuadrículas que se hallan sobre la misma vertical están chocadas por el fluido con el propio ángulo θ , supuesto ser éste una medio entre todas» [Cor. 6]. De una u otra forma, la resistencia será la suma de términos en v , v^2 y v^4 , sobre lo que afirma: «Será, asimismo en general, la resistencia horizontal que padece cualquiera cuerpo como tres cantidades: una que es como las simples velocidades, otra como los cuadrados de las mismas, y otra como los cuadrados-cuadrados» [Cor. 8]. De esta forma expresa la resistencia cuando trata «Del movimiento progresivo horizontal que toman los cuerpos flotantes, siendo impelidos por una o más potencias» [Cap. 9], escribiéndola como $Rv + Qv^2 + Nv^4$. El término Nv^4 incluye los efectos provenientes de la desnivelación, el segundo, Qv^2 , los de disimetría entre la proa y popa, y el primero, Rv , los debidos a la

presión. En el prólogo, cuando justifica los fundamentos de su teoría, dice que a veces hay un cuarto término: «que ninguna dependencia tiene de las velocidades, sino sólo de las áreas chocadas» [Pról. p. xxv], y que suponemos que debe referirse a la fuerza estática. No obstante, afirma que «según las ocasiones, se desvanecen algunos; y por dicha, para el asunto de la Marina que nos proponemos, quedan de ordinario sólo uno, que es la primero de las referidas [Rv]» [Pról. p. xxv-xxvi]. Con este criterio, al analizar los buques en el Volumen 2, sólo tomará este último.

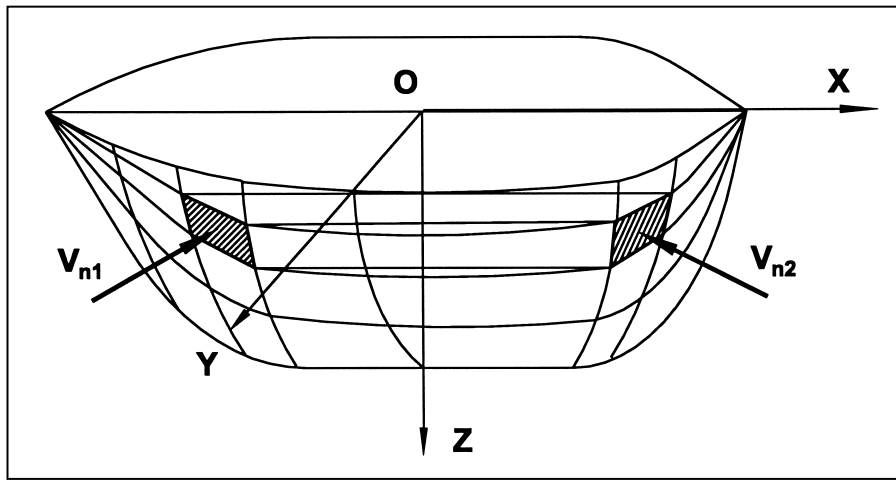


Fig. 14

Fuerzas verticales

Las fuerzas verticales se generan de manera análoga a las horizontales. En su estudio Juan se limita a un paralelepípedo, bien cuando sea éste el móvil, bien cuando lo sea el fluido. Sean sus dimensiones b , c y e , al igual que se ha mostrado en la fig. 13, y sumergido una profundidad h . La fuerza total resultará como consecuencia de la aplicación de [10] a la cara superior y a la inferior. Si el movimiento es hacia arriba la primera de éstas actuará como impelente y la segunda como impelida; si el movimiento es hacia abajo, los papeles se invierten. La fuerza vertical resultante, medida hacia arriba, es la siguiente³²:

³² En sus ecuaciones introduce e en vez de c , dado que ésta es la proyección vertical de la dimensión horizontal. Hemos mantenido c para no complicar el proceso.

$$F_Z = \rho bc \left[g \operatorname{sen}^2 \omega \pm v_n \left(\sqrt{2g(h+e)} + \sqrt{2gh} \right) \operatorname{sen} \omega \right] \quad [37]$$

En la que el signo positivo corresponde a un movimiento hacia abajo y el negativo hacia arriba. Si el fluido está en reposo y el móvil es el paralelepípedo habría que sustituir $\operatorname{sen} \omega = 1$, con lo que quedaría:

$$F_Z = \rho gbce \pm \rho bc v_n (\sqrt{2g(h+e)} + \sqrt{2gh}) \quad [38]$$

El primero de los dos sumandos, $\rho gbce$, es el peso del fluido desalojado, tal como indica el teorema de Arquímedes, y que resulta de los términos estáticos de sus ecuaciones, mientras que el segundo es el debido a la velocidad. Si además el espesor del cuerpo fuese nulo ($e=0$) el resultado sería:

$$F_Z = \rho bc v_n \sqrt{2gh} \quad [39]$$

A esta fórmula añade el comentario: «lo mismo sucederá si h fuere muy grande respecto de e , de suerte que pueda despreciarse sin error sensible esta cantidad, como sucede en los cuerpos que caen por el aire próximos a la superficie de la tierra.» [Prop. 44, Cor. 3].

Otra de sus particularizaciones se refiere a lo que llama resistencia nula, que correspondería a $F_Z=0$, como resultado de igualar a cero la expresión [37], y de lo que se obtendría para la velocidad:

$$v_n = \frac{g \operatorname{sen} \omega}{\sqrt{2g(h+e)} + \sqrt{2gh}} \quad [40]$$

Propiamente no es que la resistencia sea nula, sino la condición en que ésta es igual al peso del fluido desalojado.

Como es habitual en Juan siguen una serie de casos particulares, que no comentaremos.

Momentos

El cálculo de los momentos generados en el movimiento se obtiene como la suma de los productos vectoriales de las fuerzas por sus distancias al eje, sean aquellas fuerzas puntuales o diferenciales. Este es el proceder de Juan, que había establecido que «a los productos de las potencias por sus distancias a un plano... se les llaman momento de las mismas potencias» [Libro 1, Def. 22].

Puesto en forma de ecuación, la definición de momento sería:

$$\vec{M} = \int_{\Sigma} \vec{r} \times d\vec{F} \quad [41]$$

Donde dF es la fuerza normal a la superficie y r un vector que tiene su origen en un punto del eje de momento y termina en el punto de aplicación. Sobre la definición de dF nos remitimos a la ecuación [28].

El cálculo práctico lo plantea con la misma metodología seguida para la resistencia; esto es, dividir el cuerpo en cuadrículas, calcular las fuerzas y sus componentes en cada una, y multiplicarlas por los brazos respectivos a los ejes de momento. Como ejes de referencia toma uno vertical y dos horizontales, y de éstos uno en la dirección del movimiento y otro perpendicular al mismo [Prop. 63, Esc.]. El origen lo sitúa en la superficie del agua sobre la vertical del centro de gravedad del cuerpo, aunque ello lo diga con posterioridad [Prop. 66]. En el Volumen 2 los definirá con más precisión, y además denominará «balance» y «cabezada» a los horizontales paralelo y perpendicular a la quilla, respectivamente [Vol. 2, Lib. 4, Cap. 5, §427].

Cuando se considera el buque completo, los momentos producidos por el movimiento se sumarán a los debidos al resto de las máquinas del mismo, esto es, velas, timón y remos.

Si bien en general, para una forma cualquiera se producirán en el movimiento momentos respecto a los tres ejes, éstos se reducirán sólo al cabeceo para una forma barquiforme cuando avanza sin deriva³³, ya que los otros dos se anularán por la simetría del cuerpo y de la corriente. Sin embargo, aún con esa forma se producirán momentos de guiñada y balanceo cuando haya un ángulo de deriva, pues la componente lateral de la corriente actuará a un lado del casco como impelente y al opuesto como impelido³⁴.

La secuencia de exposición que sigue Juan es algo confusa, pues analiza primero el momento respecto a un eje vertical, lo cual correspondería a un movimiento de costado [Prop. 65]. A continuación entra en el de cabeceo [Prop. 66] no sólo en el caso en que el cuerpo se mueve, sino también cuando está inmóvil y únicamente sujeto a perturbaciones, situación ésta que transforma en el balanceo [Prop. 67]. Veremos las dos últimas.

³³ La deriva es ángulo formado por la corriente y el eje de la quilla del barco, indicado como λ en la fig. 28.

³⁴ El desarrollo que presenta Juan es, a veces, difícil de seguir, ya que trata simultáneamente los momentos de cabeceo y balanceo, que si bien son de naturaleza análoga, en la práctica uno corresponde a una forma simétrica y el otro no.

Los momentos respecto a los ejes horizontales [Prop. 66], se generan por las fuerzas verticales y horizontales, siendo estas últimas las que siguen la dirección del eje del cuerpo o su perpendicular. En particular, para el cabeceo intervendrán las fuerzas verticales, resultantes de proyectar la cuadrícula sobre el plano XY , con un brazo igual al de la coordenada x más las horizontales, provenientes de la proyección sobre YZ , cuyo brazo será la distancia vertical entre el centro de la cuadrícula y en centro de gravedad de la parte sumergida del cuerpo. El resultado es:

$$M_y = \frac{1}{2} \rho \int_{\Sigma} (v_z \pm v_n)^2 [(z - z_{cg}) dy dz + x dx dy] \quad [42]$$

Donde z_{cg} es la posición del centro de gravedad, asimismo el primer sumando del corchete corresponde a las fuerzas horizontales y el segundo a las verticales.

Con la división en cuadrículas dada por Juan, tomando cada vez la cuadrícula de proa y la de popa de forma similar a como había hecho para la resistencia [Prop. 66, Cor. 3]³⁵, se llega a la siguiente expresión:

$$\Delta M_y = \frac{1}{2} \rho [(v_{n1}^2 - v_{n1}^2) + 2v_z(v_{n1} + v_{n2})](z - z_{cg}) \Delta y \Delta z + [(v_z + v_{n1})^2 x_1 - (v_z + v_{n2})^2 x_2] \Delta x \Delta z \quad [43]$$

En donde el subíndice 1 corresponde a la cuadrícula de la proa y el 2 a la de la popa.

Para el momento de balanceo el desarrollo es análogo con la sustitución en [42] del corchete por $z dx dz + y dx dy$.

Estabilidad y metacentro

En el supuesto de que el cuerpo estuviese inmóvil los momentos debidos a las fuerzas hidrostáticas serían nulos. Ahora bien, si en esa condición de reposo el buque oscilase alrededor de su eje de cabeceo o balanceo, la redistribución de las fuerzas de presión sobre el casco producirá unos momentos cuyo sentido será determinante para la estabilidad del sistema. Estas fuerzas, para Juan, se derivan inmediatamente de sus ecuaciones al igualar la velocidad a cero, ya que su teoría engloba a la hidrostática e hidrodinámica. El momento resultante bien es recuperador y tiende a contrarrestar la oscilación, bien es desnivelador y trata de ampliarla. En el primer caso el sistema es estable, mientras que en el segundo es inestable. La condición de recuperador o desnivelador depende de la forma geométrica del cuerpo y de la posición del centro de

³⁵ Una de las dificultades que presenta el texto de Juan es la simbología. Aquí hemos procurado mantener siempre la misma, lo que la separa de la de Juan, aunque los conceptos sean los mismos.

gravedad. Resultado de esto son las condiciones de estabilidad en cabeceo y balanceo, fenómenos que son de la misma naturaleza aunque por la configuración de un buque sea mucho más significativo y determinante el del balanceo. Juan insiste en la equivalencia teórica de ambos al referirse específicamente al navío [Vol. 2, §473, §624]. A pesar de que estos momentos son de origen estático, sin embargo, al oscilar el cuerpo se inducen velocidades en el casco, las cuales, a su vez, producen fuerzas dinámicas. El efecto de las mismas es un amortiguamiento en el movimiento de balanceo o cabezada. Juan analiza este tipo de momentos que son ignorados por otros autores.

Para el cálculo de los momentos, con el supuesto de la inmovilidad la ecuación [42] se convierte en:

$$M_y = \frac{1}{2} \rho \int_{\Sigma} v_z^2 [(z - z_{cg}) dydz + x dx dy] \quad [44]$$

Se puede demostrar que el primer sumando es nulo dada la naturaleza de la superficie Σ respecto del agua; de lo que resultaría:

$$M_y = \frac{1}{2} \rho \int_{\Sigma} v_z^2 x dx dy = \rho g \int_{\Sigma} z x dx dy \quad [45]$$

Similar a la dada por él [Cor. 4]. Esto es más claro si en la ecuación [43] se hace $v_{n1} = v_{n2} = 0$ lo que conduce a:

$$\Delta M_y = \frac{1}{2} \rho (v_z^2 x_1 - v_z^2 x_2) = \rho g z (x_1 - x_2) \Delta x \Delta y \quad [46]$$

Que coincide con la anterior y que permite calcular el momento de la fuerza de flotación del cuerpo, que es el del volumen del líquido desalojado, respecto al centro de gravedad, y que ha de ser igual al momento del peso por la distancia horizontal entre el centro de gravedad y el de presiones. A este último lo llama Juan «centro del volumen», y es el centro de gravedad del volumen del líquido desalojado. Resulta [Cor. 5]:

$$\rho g \int z (x_1 - x_2) dx dy = Ph = mgh \quad [47]$$

Donde m es la masa total y h la distancia entre el centro de gravedad y el de volumen. Esta expresión es aplicable al cabeceo, si bien sería aplicable al balanceo con las modificaciones oportunas. Juan pasa a este último, pero primero indaga la relación entre el momento y el ángulo de balanceo. Para ello elige un modelo sencillo,

que es un cuerpo de revolución alrededor de un eje horizontal enrasado con el nivel del líquido [Cor. 8] que tiene su centro de gravedad G a una distancia k del centro H (fig. 15). Si se hace girar al cuerpo un ángulo δ respecto a la vertical, el centro de gravedad se desplazará a G' y el momento debido al peso sería $Pk \text{sen} \delta$; por tanto, existirá una relación entre este momento y el hidrostático Ph , de la forma:

$$Ph = Pk \text{sen} \delta \quad [48]$$

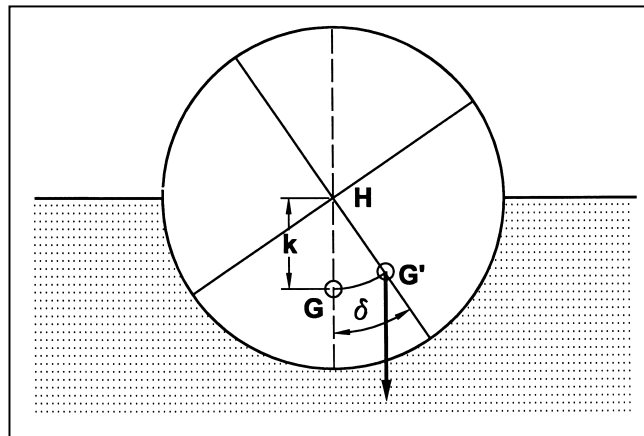


Fig. 15

Juan afirma que esta relación también se verificará para cuerpos que no fuesen de revolución, con la salvedad de que en éstos la distancia k sería variable con la inclinación [Cor. 9]. Tras estas precisiones pasa a calcular el momento que se induce cuando un cuerpo de forma cualquiera, pero simétrico, oscila respecto a su centro de gravedad [Prop. 67]. No es necesario insistir que se trata de un balanceo. De acuerdo con la fig. 16, al inclinarse un ángulo δ aparece un empuje de flotación en el triángulo DEL , mientras que desaparece el del AEC . Si bien ambos tienen la misma área, la diferencia es que su momento respecto al centro de gravedad, que está en G , es diferente. El momento hidrostático total será el de la sección ABD , cuyo centro de presión está en F , más el del primer triángulo menos el del segundo, cuyos centros de presión están a $2/3$ de cada manga³⁶. El total, obtenido como resultado de una integración a lo largo del eje de la quilla, sería:

³⁶ El cálculo es sencillo. Cada uno de los triángulos tienen un área de $e^2\delta/8$ y el brazo del centro de presión $2e/6$, el resultado para los dos será $e^3\delta/12$.

$$M_x = \left(hmg + \rho g \int \frac{1}{12} e^3 dx \right) \text{sen } \delta \quad [49]$$

Aunque Juan no lo diga, el término integral es el momento de inercia geométrico de la sección del cuerpo por la línea de flotación.

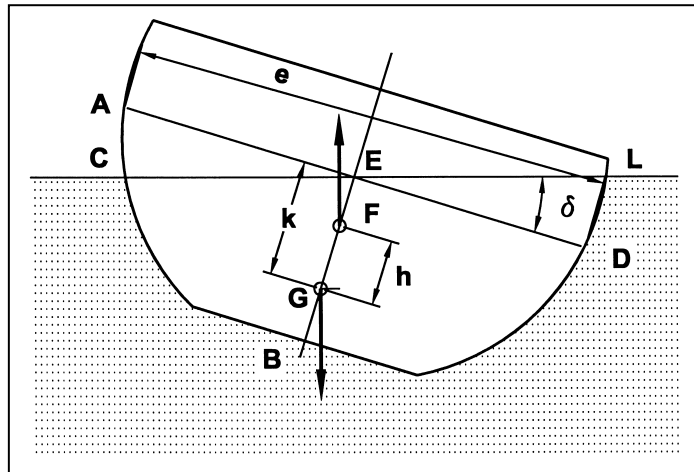


Fig. 16

Después de haber sentado estos principio generales, Juan pasa a la aplicación a un paralelepípedo que se mueve primero horizontalmente y luego inclinado, así como a un cilindro que avanza perpendicularmente a su eje. Ejemplos, uno y otro, habituales pero en los que no nos detendremos, aunque reconoceremos la complejidad de las fórmulas que obtiene. La aplicación directa al buque no la hará hasta el Vol. 2 [Lib. 2, Cap. 3], usando la fórmula anterior para determinar la máxima altura posible por encima del centro de presiones a que puede estar el centro de gravedad para que el buque siga siendo estable. A medida que el centro de gravedad se eleva, el momento disminuye, hasta anularse cuando $M_x=0$. El valor de h resultante es:

$$h_m = \frac{\rho}{m} \int \frac{1}{12} e^3 dx = \frac{1}{V} \int \frac{1}{12} e^3 dx = \frac{I_x}{V} \quad [50]$$

Donde V es el volumen del agua desalojada e I_x el momento de inercia. A h_m lo había denominado Bouguer metacentro, como recuerda Juan [Vol. 2, §150], y co-

responde a la mínima separación entre los centros de gravedad y volumen para que el buque sea estable.

En todo este desarrollo se ha supuesto el cuerpo inmóvil. No obstante, Juan no abandona los supuestos en que también haya velocidades laterales [Prop. 67, Cor. 2-3]. Si ello fuese así el momento resultante quedaría como:

$$M_x = g \left(hm + \rho \int \frac{1}{12} e^3 dx \right) \text{sen} \delta + 2\rho \int v_z v_n y dy dx + 2\rho \int v_z v_n (z - z_{cg}) dy dz \quad [51]$$

Fórmula obtenida a partir de la [43] en la que se han sustituido el eje OY por el OX . A este valor habría que añadirle lo que resultara de las desnivelaciones, así como lo que pudiera originarse por la acción de unas superficies sobre otras [Esc. 2]. En cuanto al valor de esta corrección estima que puede ser excesiva si la velocidad es grande. Al respecto recuerda que «Leonardo Eulero y M. Bouguer, que son los Autores que han tratado este asunto con más extensión, no han calculado, sin embargo, sino los momentos que resultan en el caso de reposo» [Esc. 3].

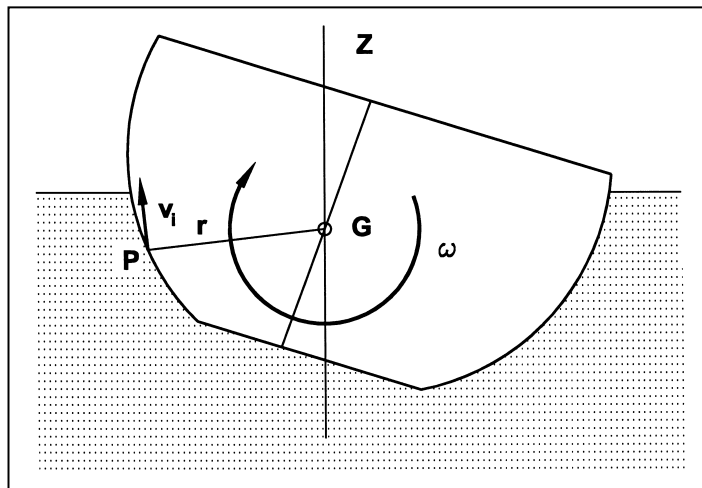


Fig. 17

Otro tipo de momentos que también considera son aquellos que se generan como consecuencia de las velocidades que aparecen en el casco cuando el cuerpo gira respecto a cualquier eje en un fluido. En el balanceo, fig. 17, si la velocidad de balanceo es ω , se inducirá en un punto P una velocidad lineal $v_i = \omega r$, perpendicular al radio

vector GP , la cual tendrá una componente normal a la superficie de la que resulta una la resistencia, y por tanto también unos momentos que serán proporcionales a ω y, como es fácil demostrar, contrarios a la misma, lo que significa que son amortiguadores. El procedimiento para su cálculo es el habitual: dividir en cuadrículas, hallar las fuerzas en cada una, y como consecuencia los momentos. Tras las oportunas operaciones [Prop. 79], llega a una expresión en que se manifiesta la proporcionalidad con ω [Cor. 8], que luego particulariza a varios supuestos.

9. INTERFERENCIAS ENTRE DESNIVELACIONES

Juan ha introducido las desnivelaciones como un fenómeno asociado al movimiento de una superficie en un fluido, cuyo efecto es la alteración de una zona próxima a aquélla. Si en esa zona hubiese otra superficie, ésta se encontraría influenciada por la desnivelación producida por la primera, lo cual modificaría las fuerzas que se producirían sobre la misma si estuviera aislada. Juan dedica un capítulo a este tema [Cap. 7] que titula: «De lo que las desnivelaciones del fluido en unas superficies alteran la fuerza que padecen otras, como también las resistencias». El análisis que lleva a cabo es agudo, aunque introduzca nuevas hipótesis en el desarrollo que parecen estar en contradicción con sus estudios anteriores y haya extremos discutibles, como veremos. Estimamos que la razón de esta nueva visión es el estudio de las proas o popas de los barcos cuando estén formadas por varios planos, así como el efecto de la primera sobre la segunda. Como es habitual usa una formulación compleja que simplificaremos. Es interesante constatar que los resultados de estas interferencias le obligan a cambiar conclusiones anteriores relativas a la resistencia.

El problema lo plantea como dos superficies planas en movimiento CN y CL , (fig. 18a) unidas en C . La primera, CN , produce una desnivelación, que modificará la fuerza total sobre la segunda, CL , que es lo que pretende estudiar. Con esta configuración considera tres posibilidades: el efecto de la cara impelente de la primera sobre la impelente de la segunda, el efecto de la dos impelidas, y el correspondiente cuando CN es impelente y CL impelida. No dice nada sobre el supuesto de impelida sobre impelente. Prácticamente el primero de los tres casos podría servir para el estudio de una proa formada por varios planos, el segundo para una popa similar, y el tercero como el efecto de un plano de proa sobre otro de popa. Por otra parte, además de la configuración descrita en la fig. 18a también analiza cuando CL mira hacia arriba (fig. 18b), incluso cuando sale del agua (fig. 18c), así como si hay una separación entre las dos planos (fig. 18d). No obstante, estas variantes son reducibles a la primera, que es la básica, con los oportunos arreglos en cuanto al signo de los ángulos y los límites de las integraciones.

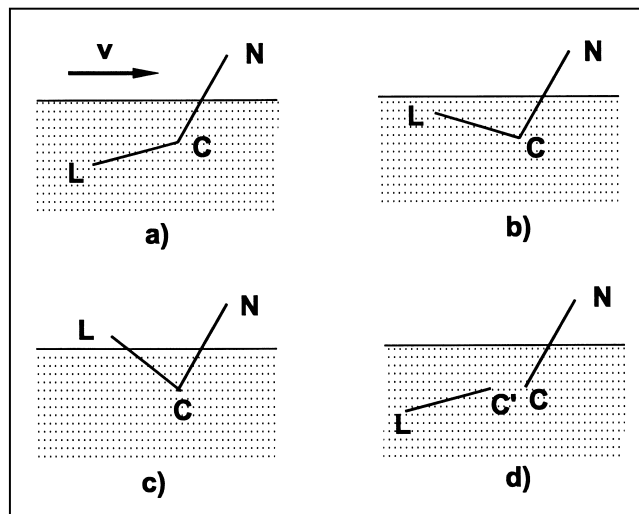


Fig. 18

Como punto previo al proceso de evaluación, comienza con unas puntualizaciones en las que se pone de manifiesto su base de argumentación. Presenta la fig. 19³⁷, que representa un cuerpo de sección rectangular que avanza en un fluido, y sobre el que dice:

Siendo PF la desnivelación procedente del movimiento de una superficie, CD la superficie del fluido, y FD la parábola que lo termina, es preciso que se forme igual y semejante parábola CF al lado opuesto de PF , pues la elevación FP , y la gravedad que ésta comunica a todas las partículas del fluido, se forma la parábola FD : con que habiéndose de comunicar igual gravedad hacia las de FC , igual parábola FC se debe formar. [Prop. 46]

Lo anterior nos sorprende, ya que parece estar en contradicción con la hipótesis que había establecido para la formación de las desnivelaciones, según la cual se formaba una ascendente en la cara impelente y otra descendente en la impelida. Además recalca: «Esta regla se hace general para cualquier superficie impelente o impelida, vertical, inclinada u horizontal.» [Cor. 1]. Hay otra puntualización más: «Si fuere un cuerpo AG el que movido produjere la desnivelación, siendo PG menor que $PC=PD$, no impedirá aquél que se forme la desnivelación CGB , aunque sí la $BGPF$, por ocupar su lugar el mismo cuerpo». [Cor. 2] Físicamente parece difícil suponer que un cuerpo parta una desnivelación, por ello, suponemos que lo que Juan propone es una construcción ma-

³⁷ Es una reproducción de su fig. 64.

temática, un artificio de cálculo, no una realidad física. Esto está en consonancia con el siguiente corolario:

Las desnivelaciones deben, por consiguiente, producir fuerza positiva o negativa en las demás superficies que circundan, o a que alcanzan, alterando las que padecían sin esta circunstancia: como también la velocidad con que saliera el fluido por un agujero hecho en las mismas. [Cor. 3]

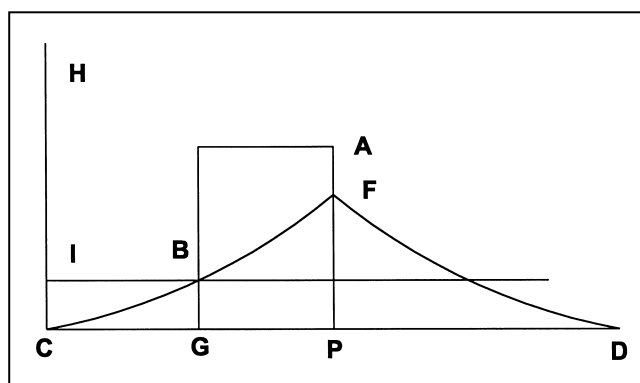


Fig. 19

Que la desnivelación frontal produzca un efecto en la cara de atrás es plausible, ya que la en la observación de un cuerpo en una corriente se aprecia que la elevación delantera le contornea modificando la desnivelación trasera, como hemos visto al tratar de las desnivelaciones [Prop. 18, Esc.].³⁸ Este efecto es mayor cuanto más corto sea el cuerpo, por lo que pone la condición «siendo PG menor que $PC=PD$ », lo cual no se reflejaba en el estudio que ya había hecho del paralelepípedo, como hemos expuesto con anterioridad. El mecanismo matemático para introducir este efecto pasa por la desnivelación simétrica y la alteración de la velocidad sumersa.

Para hallar la velocidad sumersa en un punto dice:

luego si en general se tiene la altura de la desnivelación sobre un orificio, multiplicándola por $2g$, y sacando la raíz cuadrada, se tendrá la velocidad que tomarán las partículas del fluido; la que añadida o sustraída de la que debe resultar, por la altura que tuviere la superficie del fluido sobre el orificio, se tendrá la velocidad con que saldrá por éste. [Prop. 47].

³⁸ Cf. *supra* §6.

Esto es, para un punto M (fig. 10) situado a una profundidad z bajo la superficie sería la suma de la velocidad sumersa de esa altura más la correspondiente a la altura de la desnivelación δ , que sería:

$$v_z = \sqrt{2gz} + \sqrt{2g\delta} \quad [52]$$

Con la estructura de la desnivelación expuesta en [17-18], si δ_m es la altura de la misma en el plano y λ la longitud de la misma, la fórmula anterior se transforma en:

$$v_z = \sqrt{2gz} + \sqrt{2g\delta_n} = v_{z_0} + v_n \left(1 - \frac{x}{\lambda} \right) \quad [53]$$

Tras estas precisiones pasemos a analizar las configuraciones que propone.

La primera configuración, o básica, se muestra en la fig. 20. Consiste en los planos CN y CL unidos e inclinados que avanzan conjuntamente a una velocidad v_n , el primero parcialmente sumergido y el segundo completamente. Según expone [Prop. 48], CN causa la desnivelación $OANQ$, que apreciamos que consiste en la propia y en una simétrica pero desplazada hasta la vertical del punto C , lo que corrobora el carácter virtual que la estamos atribuyendo. Respecto a CL , le atribuye la desnivelación $OFED$, lo cual vuelve a ser motivo de extrañeza, ya que una superficie sumergida no tiene que producir ninguna, además no dice nada para la determinar su magnitud, únicamente: «que se supone menor que la primera [$OANQ$], por ser el ángulo que forma CN con la dirección del movimiento mayor que el que forma LC » [*Ibid.*]. Suponemos que la altura sería la que existiría si se prolongase la placa CL hasta salir fuera del agua, como hemos mostrado en línea punteada, así como la correspondiente desnivelación $E'D'$ que se trasladaría horizontalmente como ED . A partir de ésta se definiría la rama FO y la zona CR de la placa CL , limitada por el punto C y la vertical desde F , que será donde se manifieste el efecto de la desnivelación NQ , que dará como resultado una fuerza adicional a sumar, o restar, a la que se produciría sobre CL si estuviese aislada. La extensión de CR depende de la geometría del sistema, pudiendo llegar a salirse fuera de la placa, lo cual habría de tenerse en cuenta [Esc. 1].

La velocidad sumersa o «con que saldrá el fluido por el orificio hecho en H » [Prop. 48] sería el resultado de aplicar la última ecuación, que ese punto H , separado una distancia x del eje AC :

$$v_{z_{CR}} = v_{z_0} + v_{CN} \left(1 - \frac{x}{\lambda} \right) \quad [54]$$

Siendo v_{CN} la velocidad normal a la placa CN . Siguiendo los pasos que había dado al establecer su teoría general, para hallar la presión en la zona CR tendría que sumar a esta velocidad sumersa la de avance de la placa CL , de forma similar a lo expresado en las ecuaciones [6-7]; luego se integraría para obtener la fuerza total en ese tramo que a la que se añadiría la del resto de CL , con la velocidad sumersa sin modificación, para llegar a la fuerza total sobre CL . Pero no lo hace así, sino que para hallar la fuerza en CR utiliza solamente la expresión [54], a la que resta la que tendría aislada con lo que obtiene lo que llama «el exceso de fuerza que la comunica la otra superficie [CN]» [Cor. 2]. Luego, para obtener el total de la fuerza sobre CL , añade a esa diferencia «la fuerza horizontal que padece toda la superficie CL resultante de la desnivelación que ella sola produce» [Ibid.]. Como conclusión encontramos a todo esto dos objeciones: una el realizar el cálculo sin sumar la velocidad de CL , y la segunda el restar el efecto del tramo CR aislado, pues al sumar luego el total sobre CL la cancela.

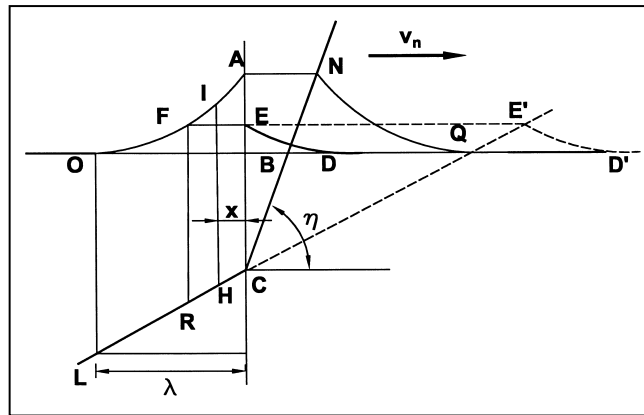


Fig. 20

Cuando ambas superficies sea impelidas [Prop. 49] el razonamiento es el mismo, pues como dice «Esta proposición no se diferencia de la dada ... sino en que son KI , y por consiguiente { } negativas» [Ibid.]. Sólo un corto pero interesante comentario. El que diga que KI es negativo significa que está aplicando una desnivelación con descenso, como sucede en las partes impelidas de los cuerpos, y entre llaves expresa el segundo miembro de la velocidad inducida [54], que ahora quedaría como:

$$v_{z_{CR}} = v_{z_0} - v_{CN} \left(1 - \frac{x}{\lambda} \right) \quad [55]$$

Los resultados de las fuerzas se modifican de acuerdo con lo anterior, y también nuestras objeciones.

Para el tercer supuesto, cuando *CN* es impelente y *CL* impelida, la novedad es que para la velocidad inducida por *CN* toma el valor del caso impelente, dado en [54], a lo que añade: «pero suponiendo ahora que la superficie *CL* es impelida o que huye del fluido con la velocidad v_{CL} , con ésta menos saldrá el mismo fluido por el orificio *H*» [Prop. 50]. Esto significa que la velocidad eficaz valdrá:

$$v_{e_{CR}} = v_{z_0} + v_{CN} \left(1 - \frac{x}{\lambda} \right) - v_{CL} \quad [56]$$

Este tratamiento sí que lo encontramos acorde con su teoría, y justifica nuestros reparos tanto a la no inclusión de v_{CL} como a restar a la fuerza sobre *CR* calculada con la anterior la que resultaría de estar aislada, lo cual ahora sí se justifica. Volviendo atrás, la velocidad eficaz para el supuesto impelente-impelente sería esta misma ecuación pero con signo positivo para v_{CL} , y para el impelido-impelido el signo que cambiaría sería el del segundo término. A tenor de lo expuesto estimamos que Juan tenía una idea clara pero no la formuló debidamente. En cuanto a las ecuaciones que obtiene son similares, con una serie de corolarios y escolios para las diferentes posiciones relativas de las dos superficies.

Parecería que ahora debería de haber un cuarto caso, que correspondería a que *CN* fuese impelida y *CL* impelente. Pero no es así, sino que pasa a la situación que se produce cuando hay una separación entre las dos superficies. Aunque no explique la razón de esa omisión, conjeturamos que la causa está en la aplicación al buque. Así, como hemos visto, la configuración de ambas impelentes se corresponde con efectos generados en las distintas superficies que pueden configurar una proa; si ambas son impelentes, lo dicho es aplicable a una popa; y cuando la primera es impelente y la segunda impelida correspondería al efecto de la proa sobre la popa. El caso que falta sería el que representase los efectos contrarios a la anterior, caso que ignora, lo cual está explicado ya que en el avance de un cuerpo la desnivelación de proa le contornea incluso hasta la popa, pero a la luz de la observación no parece haber un efecto contrario aguas arriba.

En cuanto al análisis cuando hay separación entre superficies, fig. 18d, no hay novedad teórica alguna, tan sólo que la velocidad inducida en el punto *G* corresponderá a $x=x_0$.

Como caso práctico estudia la resistencia horizontal de un paralelepípedo rectangular [Prop. 52], cuyas dimensiones se muestran en la fig. 21. Para ello Juan aplica las fórmulas a que había llegado en el caso impelente-impelida, aquí, por mor de la simplicidad y claridad, iremos directamente a las velocidades eficaces. Las velocidades normales serán $v_{CL}=v_{CN}=v$; por lo que en la placa delantera la eficaz $v+v_z$ y en la

trasera, con la aplicación de [56], se tendrá $v_z - vb/\lambda$, siempre que $b < \lambda$. Como comentario a esta última expresión, si $b > \lambda$ se tendrá $v - v_z$ que era la hallada para cualquier superficie impelida; pero para $b=0$, queda v_z , esto es, que el efecto de la desnivelación delantera anula el propio impelido.

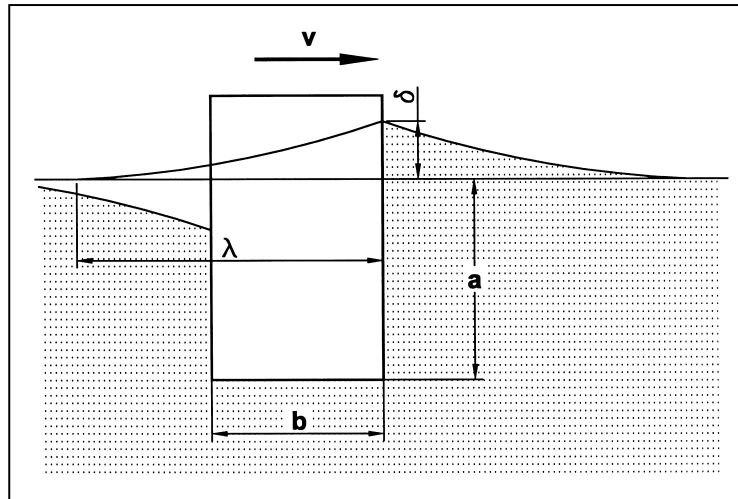


Fig. 21

Para calcular la fuerza horizontal total usa para la impelente el valor hallado en [19], y para la impelida el dado en [20] con la sustitución de v_n por vb/λ . El resultado final es:

$$F_x = \rho g c \left[\frac{4v_n a^{3/2}}{3\sqrt{2g}} \left(1 + \frac{b}{\lambda} \right) + \frac{v_n^2 a}{2g} \left(1 - \frac{b^2}{\lambda^2} \right) + \frac{v_n^4}{6(2g)^2} \left(1 + \frac{b^4}{\lambda^4} \right) \right] \quad [57]$$

Si el cuerpo fuese más largo que la desnivelación $b > \lambda$, de lo que $b = \lambda$, resultaría [Cor. 1]:

$$F_{pp} = 2\rho g c \left[\frac{4va^{3/2}}{3\sqrt{2g}} + \frac{v^4}{6(2g)^2} \right] \quad [58]$$

Expresión ya hallada [29] al calcular la resistencia de un simple paralelepípedo. Ahora bien, si $b=0$, que sería el caso de un plano, se llegaría a [Prop. 52, Cor. 2]:

$$F_{pl} = \rho g c \left[\frac{4va^{3/2}}{3\sqrt{2g}} + \frac{v^2 a}{2g} + \frac{v^4}{6(2g)^2} \right] \quad [59]$$

Donde por F_{pl} entendemos la fuerza en un plano frente a F_{pp} que corresponde a un paralelepípedo largo. Combinado ambas:

$$F_{pp} = 2F_{pl} - \rho v^2 ac \quad [60]$$

Esto significa, y así lo observa, que si la velocidad fuese tan pequeña que se pudiese despreciar el segundo sumando, la resistencia de un paralelepípedo largo resultaría el doble que la de un plano [Prop. 52, Cor. 5], de lo que hará uso posteriormente.

Aunque no entremos en casos particulares, recordemos que ya había reconocido que en la realidad el líquido fluía «corriendo en dirección perpendicular al movimiento de la misma [placa], y ocupa o desocupa parte del hueco o elevación que hemos deducido» [Prop. 18, Esc.]. Estos efectos, continúa, «se hacen notables siempre que se haya de determinar la justa o absoluta fuerza que padecen las superficies» [*Ibid.*], y que según [60] disminuyen la resistencia.

10. VELAS

La aplicación de su teoría a la fuerza que ejerce el viento sobre las velas la lleva a cabo en el Volumen 2 del *Examen*, y más concretamente en el Libro titulado «De las Máquinas que mueven y gobiernan el navío». A las velas las considera como «unos lienzos expuestos al viento que los impele, [que] no pueden por su flexibilidad mantenerse planas» [Vol. 2, §256].

Para calcular la fuerza que se produce sobre las mismas, asimila la atmósfera a un «mar de aire», hipótesis ya empleada por otros autores de la época. Este mar será una capa de un fluido de densidad uniforme, e igual a la del aire al nivel del mar, cuya profundidad, esto es la altura, sería aquella que produjese una presión igual, también, a la existente al nivel del mar. Según esta definición esa profundidad sería $z_e = p_a / \rho a g$. Por tanto, de la aplicación de la ecuación [33], la fuerza que se generaría en una placa plana de superficie S que se moviese a una velocidad v_n sería $2\rho_a S v_n \sqrt{2gz_e}$. Ahora bien, aceptando la corrección de que un plano tiene la mitad de la resistencia de un paralelepípedo, expuesta en [60], llega a la fórmula:

$$F = \rho_a S v_n \sqrt{2gz_e} \quad [61]$$

En esta ecuación el término $\sqrt{2gz_e}$ sería la velocidad sumersa del aire al nivel del mar.

Para hallar el espesor de la atmósfera supone que la densidad del aire es 1/1000 la del agua de lluvia, que a su vez es 1/14 de la del mercurio. Como la altura barométrica es de 2,5 pies (762 mm)³⁹, obtiene que $z_e=35000$ pies (10675 m). Sin embargo, esta determinación no le satisface pues «depende de las experiencias físicas, y de distintos preparativos practicados en los fluidos, que no sabemos tenga el aire a la orilla del mar» [Vol.2, §259]. Por ello prefiere tomar como base de partida las experiencias hechas por él mismo en el Perú⁴⁰, en las que para que el barómetro baje una línea (2,12 mm) había que elevarse 86 pies (26,23 m). De ello deduce que la altura en cuestión es 30960 pies (9443 m)⁴¹.

Pero como Juan parece encontrarse más cómodo trabajando con el agua, reduce la última ecuación al agua incluyendo una constante, tal que:

$$F = k_a \rho_{mar} S v_n \quad [62]$$

Donde ρ_{mar} es la densidad del agua de mar y k_a la constante de reducción⁴².

Para Juan la vela tiene una «curvidad», hecho advertido por casi todos los autores de la época, pero soslayado por la dificultad de tratamiento, tal como afirma, «la intrincada teórica que resultara de formar los cálculos, atendiendo a esta curvidad, ha hecho que todos los demás autores las hayan supuesto como planas» [§256]. Juan no se arredra. Toma una vela (fig. 22) sujeta en dos mástiles verticales en *A* y *B* curvada por un viento *v*, que producirá en los mástiles una fuerza *T*. Un elemento diferencial *ds* de la misma, que forme un ángulo α con el viento, estará sometido en sus extremos a la misma tensión *T*. La fuerza elemental será:

$$DF = \rho_a \sqrt{2gz_e} v \text{sen } \alpha ds = \rho_a \sqrt{2gz_e} v dy \quad [63]$$

³⁹ En lo sucesivo cuando se cite una medida se hará en las unidades de la época, pero se complementará entre paréntesis con su valor en el Sistema Internacional. Entonces las unidades variaban casi de ciudad en ciudad; aunque las más usadas en los contextos científicos fueron las inglesas y las de París. Recordemos las equivalencias: un pie inglés =304,8 mm, un pie de París =324,8mm; una libra inglesa =0,4536 kg, una libra de París = 0,4895 kg.

⁴⁰ En la expedición para la medición de un arco de meridiano. Relatadas en sus *Observaciones Astronómicas y Físicas*, Lib. 5, Cap.4.

⁴¹ Si utilizásemos las mediciones actuales la altura sería 8470 m.

⁴² Juan, en su sistema de unidades, encuentra el valor de 0,04271 con 30960 pies y 0,04541 con 35000 tomando 1,030 como densidad relativa del agua de mar. Pero que, quizás por simplificar a números enteros, lo aproxima como 1/20. En nuestro sistema de unidades serían 0,04861 y 0,05247 respectivamente.

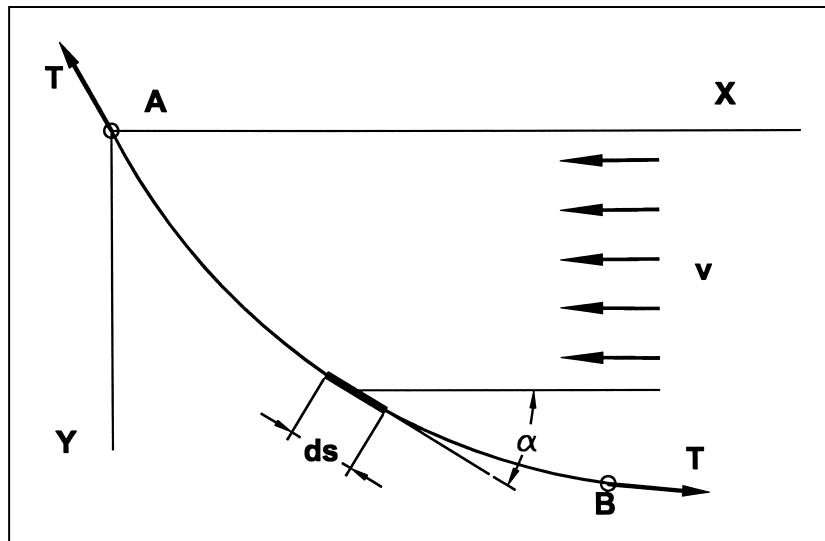


Fig. 22

Introduciendo una constante auxiliar $Q=T/(\rho_a v \sqrt{2gz_e})$ resulta para la ecuación de la vela:

$$\frac{ds}{R_c} = \frac{dy}{Q} \quad [64]$$

Donde R_c es el radio de curvatura, $1/R_c = d^2y/dx/ds^3$. La solución de la ecuación es:

$$Y = Q \arccos e^{x/Q} \quad [65]$$

Juan llega a la misma solución pero en forma paramétrica [§261], $x=Q \ln \cos n$; $y=Qn$. Esta curva tiene carácter universal y toda vela es una fracción de la misma.

Ya de forma práctica, una vela ante un viento adoptará una forma definida por los ángulos de las tangentes en sus extremos, χ_A y χ_B (fig. 23). La fuerza resultante la calcula suponiendo una vela plana equivalente cuyo ancho sea el de la cuerda h , afectada por un factor de corrección G , tal que:

$$F_N = \rho_a \sqrt{2gz_e} ahGv \sin \alpha \quad [66]$$

Donde G vale:

$$G = \frac{\text{sen} \frac{\chi_B - \chi_A}{2}}{\frac{\chi_B - \chi_A}{2}} \quad [67]$$

Además, la fuerza no será perpendicular a la cuerda h , sino que formará un ángulo ε , cuyo valor es:

$$\varepsilon = \frac{\chi_B - \chi_A}{2} \quad [68]$$

Estas fórmulas permiten calcular la fuerza y su dirección una vez conocida la forma que adopta la vela, pero lo que no explica Juan es cómo llegar a esta forma a partir de una vela de una longitud de lienzo, una separación de mástiles y un viento dado. Por otra parte, supone que éstos están en posición vertical, mientras que en la realidad la vela está sujeta por un mástil horizontal, llamado verga en lenguaje mariner, y un serie de cabos. Las explicaciones de Juan son interesantes pero incompletas.

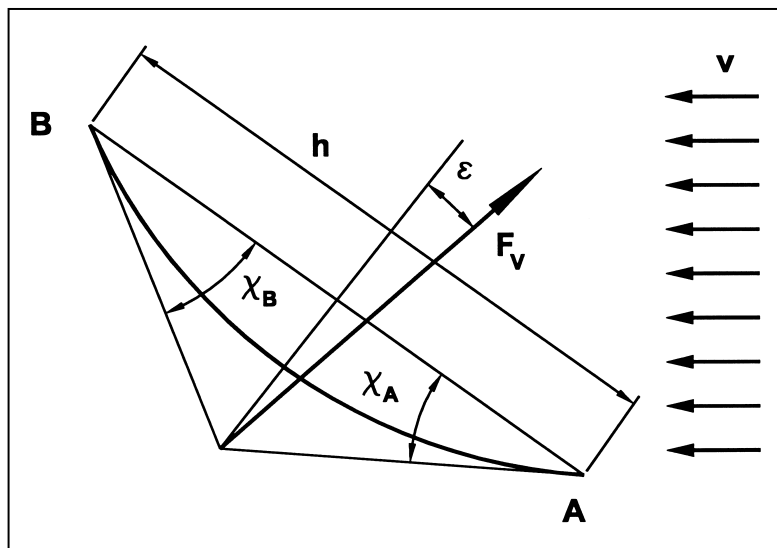


Fig. 23

11. EXPERIMENTOS

Una de los puntos fundamentales del pensamiento de Juan, como ya hemos dicho, era partir de experimentos certeros [Pról. p. xxii], luego buscar una teórica y ver si ésta se acomodaba a los movimientos de la naturaleza. A lo largo del *Examen* hace continuas llamadas a la práctica como elemento para la justificación de su teoría, en especial en cuanto a la conclusión de que la resistencia había de ser proporcional a la velocidad en vez de a su cuadrado, como mantenían casi todos los autores de su época. Veamos algunos de sus comentarios.

Al referirse a los estudios de Huygens sobre la deriva:

Resuelve... bajo el supuesto de que sea la velocidad del viento infinita y nula la deriva: ambas suposiciones bien apartadas de lo que realmente sucede en la práctica [p. viii]

esta y todas las demás determinaciones que produjo, hubieran sido de la mayor utilidad, a haber acompañado alguna práctica a la mucha Geometría que poseía. [p. ix]

Al hablar de los Bernoulli:

La sublime teórica de los *Bernoullis*, poco o nada adaptable a la práctica, no produjo sino la Obra que el año 1731 dio a luz M. Pitot,... con el título *La théorie de la manoeuvre des Vaisseaux reduite en pratique*,... M. Pitot carecía enteramente de práctica, lo que le hizo juzgar a arbitrio de las operaciones del Mar y de los Marineros, atribuyéndoles hechos que jamas se han visto. [p. xi]

Al comentar el *Traité du navire* de Bouguer:

lo cierto es, que a haber concurrido en tan digno Autor la práctica necesaria para descubrir los errores que resultan de los falsos supuestos teóricos, nada nos hubiera quedado que apetecer. [p. xiii].

Y en cuanto a la *Scientia navalis* de Euler:

El especial orden y sublime Geometría con que trata todos los asuntos tan gran Maestro, es digno de admiración: hubiera sido un tesoro de la Ciencia, y particularmente de la Marina, si a semejante destreza hubiera acompañado la práctica que igualmente deseábamos en M. Bouguer. [p. xiv].

Como conclusión a su revisión de los trabajos preliminares:

Estos han sido los documentos que nos han servido de Norte en lo científico de la Marina: la práctica por otro lado no es menos maestra, particularmente si, después de bien examinada y despejada de los accidentes que puedan hacerla variar, no se conforma con la teórica. En este caso, no hay Científico que no crea, que algún supuesto falso precedió a ésta: es preciso buscarle y corregirle, porque la práctica no es distinta de teórica: si no concuerdan, alguna de las dos está viciada. [p. xiv]

Creemos que es suficiente. En cuanto a resultados experimentales, no eran muchos los disponibles a mediados del siglo XVIII⁴³. Estaban las experiencias que realizó Mariotte con placas en el Sena, que se describen en su *Traité de mouvement des eaux* (1686); los péndulos en medios resistentes que hizo Newton y que están en la primera edición de los *Principia* (1687); la caída de bolas en fluidos, también por Newton y que aparecen en la segunda edición (1713); las resistencias de bolas lanzadas con pequeños cañones que llevó a cabo Robins y que expone en los *New Principles of Gunnery* (1742); y los de una bola en un brazo rotante por el mismo autor que presentó en la Royal Society en 1746. Los verdaderos experimentadores, ya con una metodología sistemática, efectuaron sus ensayos más tarde, como Borda en 1763 y 1767; Bossut en 1777 y 1778; sin olvidar a Chapman 1775 o Smeaton en 1759. Juan comenta extensamente los péndulos de Newton [Prop. 17, Esc.], la placa de Mariotte [Prop. 36, Esc.], las máquinas de Smeaton [Vol. 1, Apén. 2], y cita de pasada las balas de Robins [Pról. p. xxii, nota (a)].

De los experimentos con péndulos de Newton y del análisis que éste hace de los mismos, Juan se sirve para criticar la hipótesis de la proporcionalidad de la resistencia con el cuadrado de la velocidad. A esta cuestión dedica varias páginas [Prop. 17, Esc., p. 236-240], mientras que despacha los relativos a la caída de bolas, que estimamos como mucho más interesantes, completos y concluyentes, con la frase «pero todo se funda en que dicha resistencia,... es como los cuadrados de las velocidades: con que es suponer lo mismo que estaba en cuestión, y que se necesitaba especular» [Ibid.], que es ambigua, pues no cita la buena concordancia que obtiene Newton en sus experimentos. Recordemos que éste llevó a cabo los experimentos con péndulos con el fin de demostrar prácticamente la proporcionalidad de la resistencia con el cuadrado de la velocidad⁴⁴ aunque sin mucho éxito. Vistas las discrepancias, intentó aproximar las resistencias por una fórmula polinómica del tipo $hv + kv^{3/2} + lv^2$, ajustando los coeficientes de acuerdo con los valores experimentales⁴⁵. A pesar de que los resultados que obtiene son inciertos, mantiene su convicción de la proporcionalidad con el cuadrado de la velocidad. Prueba de esto es que en la segunda edición realiza nuevos experimentos con caída de bolas en agua y aire, cuyos resultados se aproximan mucho a los valores teóricos⁴⁶.

En cuanto a los trabajos de Mariotte, Juan recalcula sus valores admitiendo que son correctos, aunque termina afirmando: «Pero véase cuanto se apartan estas experiencias, que el mismo Autor [Mariotte] tiene por tan exactas, de las que yo practiqué para certificarme» [Prop. 36, Esc.]. Para esto Juan tomó «una tabla cuadrilonga de un pie (0,305 m) de ancho, expuesta perpendicularmente a una corriente de 2 pies por

⁴³ Cf. *La génesis de la mecánica de los fluidos*, en particular el capítulo 4.

⁴⁴ Los resultados los publicó en la primera edición de los *Principia*.

⁴⁵ Cf. *Principia*, Prop. XXX, Esc. general.

⁴⁶ *Op. cit.* Prop. XL.

segundo (0,61 m/s), soportó 15 1/2 libras (68,9 N) estando sumergida un pie (0,305 m) justo en el fluido.» [Ibid]. Luego sigue: «la misma tabla soportó 26 1/4 libras (111,9 N) en una corriente de 4/3 pies por segundo (0,407 m/s), estando sumergida de dos pies (0,61 m) justos» [Ibid].

Hasta aquí sus experiencias, de las que no explica ni cómo las realizó ni dónde, si fue en un canal o en una corriente natural, ni cómo midió las fuerzas y velocidad de la corriente, ni el aparato de ensayo. Por lo que dice entendemos que era una tabla rectangular de un pie de ancho que sumergía más o menos en la corriente (fig. 24). Juan calcula las fuerzas que debieron de soportar las placas «según la opinión general» [Ibid], que era igual a la resistencia con el peso de una columna de agua de base igual a la superficie frontal y altura la cinética de la velocidad. Esto es, suponer un coeficiente de resistencia $C_D=1^{47}$, que sería:

$$F = \frac{1}{2} \rho S v^2 \quad [69]$$

Tras los oportunos cálculos obtiene 3,91 (17,3 N) y 3,5 libras (15,54 N) respectivamente. Uno y otro muy alejados de las 15,5 y 26,25 libras medidas.

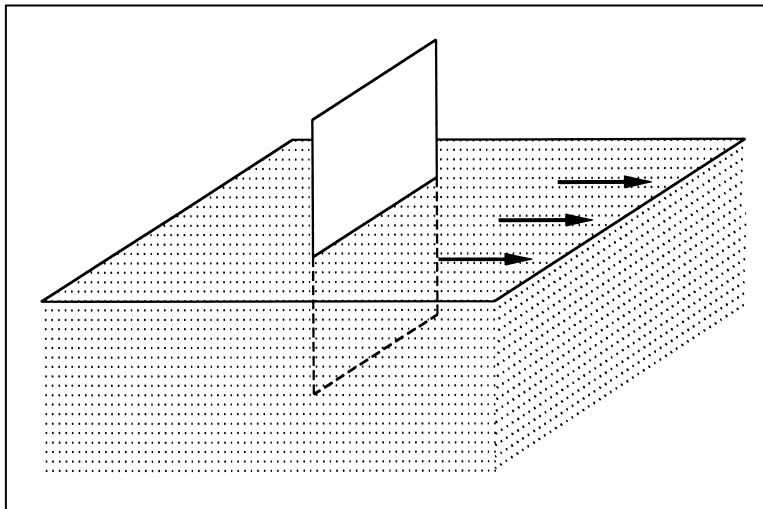


Fig. 24.

⁴⁷ Se define el coeficiente de resistencia $C_D=F_X/(2\rho v^2 S)$. Hagamos notar que los resultados de Mariotte indicaban un $C_D=1,22$.

Una vez hecho esto aplica su teoría. Primero utiliza la fórmula que había obtenido para la resistencia de un paralelepípedo con desnivelación [29], en la que desprecia el término de la desnivelación por ser la velocidad muy baja⁴⁸. Ahora bien, Juan dice que esa fórmula representa la resistencia de un paralelepípedo, mientras que el experimento lo ha hecho con una placa plana. Por lo tanto aplica las correcciones que había hallado al estudiar las interferencias entre desnivelaciones y superficies, y que relacionaban las resistencias de placas y paralelepípedos [60], y además por ser la velocidad pequeña desprecia el segundo término, con lo que se reduce la resistencia de la placa a la mitad. Con esto la ecuación a emplear sería:

$$F_x = \frac{4\rho g c v a^{3/2}}{3\sqrt{2g}} \quad [70]$$

Que aplicada a los dos casos conduce a 20,5 (91 N) y 39, 25 libras (174,3 N)⁴⁹, también superiores a las mediciones 15,5 y 26, 25⁵⁰. Entonces añade:

las dos experiencias dan, con corta diferencia, la medida absoluta de la resistencia menor de un tercio de lo que resulta por la teórica⁵¹, como se ha visto, y como debíamos esperar según el *Esc. Prop. 18*: de esta suerte para obtener la justa o absoluta medida de ella, debemos tomar los dos tercios de lo que resulte por la teórica. [*Ibid*]

Esto es, aplica una corrección de 2/3 a los valores teóricos justificada por los experimentos. En el Escolio de la Proposición 18 explicaba que el fluido contornea el cuerpo para ocupar el hueco que se produce en la parte trasera, por lo que el efecto de la corriente no es bidimensional, sino que la desnivelación será más alta en el centro de la placa y disminuye hacia los lados. De ello había advertido: «Estas cantidades [efectos] se hacen notables siempre que se haya de determinar la justa o absoluta fuerza que padecen las superficies» [Prop. 18, Esc.]. Ahora, a la vista de estas medidas, evalúa este efecto en que la resistencia disminuye en 1/3. Más bien parece un artificio para hacer coincidir los resultados teóricos con las medidas, pues él ha despreciado el efecto de la desnivelación.

En resumen, las medidas y evaluaciones se presentan en la siguiente tabla:

⁴⁸ Según nuestros cálculos esa altura sería 19 y 8 mm, frente a los 305 y 610 mm respectivamente que está sumergida la placa.

⁴⁹ A nosotros nos salen 92,5 y 174,5 N.

⁵⁰ Hagamos notar que el término $2\rho v^2 ac$ vale respectivamente 17,3 y 15, 4 N, pequeño pero comparable con los 91 y 174.

⁵¹ En verdad son 1,32 y 1,50 veces.

	Medidas	Impacto	Su teoría	Corrección
Exp. 1	15,5	3,91	20,5	13,66
Exp. 2	26,25	3,5	39,25	26,17
Ex2/Ex1	1,694	1,117	1,915	

La tercera línea muestra la relación entre las medidas de los dos experimentos que ha realizado. Esta relación la emplea como otra de sus argumentaciones contra la teoría del impacto, pues según ésta la previsión habría de ser 1,117 frente a 1,915 que daría la suya, más próxima a 1,694 que es lo obtenido experimentalmente.

Antes de seguir conviene decir que los coeficientes de resistencia que resultan de sus medidas son $C_D=3,98$ y $C_D=7,26$. Ambos extremadamente altos, frente al $C_D=1,2$ esperable. Esto nos hace sospechar que sus mediciones son incorrectas.

Hasta aquí lo que cuenta en el texto de la obra, sin embargo en el prólogo aporta algunos datos más. Dice que «la fuerza del agua corriente sobre una tabla que a ella expuse, no sólo la hallé en ocasiones cuatro veces mayor de lo que la asigna *Mr. Mariotte* sino que en otras lo era hasta ocho veces mayor» [Pról. p. xxiii]. Entendemos que se refiere a los dos casos citados anteriormente. Pero tras insistir en que ello es debido al efecto de la profundidad, sigue: «de suerte que, puesta la misma área o tabla cortada en paralelogramo rectángulo, con su lado mayor horizontal, padecía mucha menos resistencia que puesto el propio lado vertical» [*Ibid*]. Estas mediciones no las cita en el texto, cosa de extrañar. Poco más adelante continua: «si la tabla tenía de largo cuatro veces su ancho, la resistencia, con su lado mayor vertical, era próximamente dos veces mayor que puesto el mismo lado horizontal» [*Ibid*], que tampoco está en el texto.

En conclusión, sus experiencias no parecen muy fiables. Sin embargo, a la luz de los comentarios del prólogo es muy probable que realizase más experimentos. La cuestión es donde están y por qué no los publicó.⁵²

12. APLICACIONES⁵³

Jorge Juan, en el prólogo, había dicho que para justificar la validez de una teoría era necesario que además de estar fundada en unos resultados experimentales, sus

⁵² Puede que entre los papeles archivados de Jorge Juan se encuentren más resultados experimentales. Espero que alguien intente esta búsqueda.

⁵³ Al respecto recordamos que la diferencia entre un experimento y una aplicación está en que en el primero se conforma un dominio tratando de aislar los efectos de un fenómeno, mientras que en las otras lo que se hace es aplicar una teoría a una entidad concreta.

previsiones se acomodasen a la práctica. En este sentido presenta tres casos: las cometas, los experimentos sobre ruedas hidráulicas hechos por Smeaton y el comportamiento de los navíos. Sin negar el buen criterio de Juan al presentar estos casos, adelantemos que sus verificaciones son más bien cualitativas.

Cometas

Juan analiza el comportamiento de estos juguetes de forma extensa en el Apéndice 1 que titula «Sobre la teórica de los Cometas que vuelan los Niños, para verificar la ley con que resisten los fluidos», citando el estudio hecho por Mr. Euler citado al principio. Supone a la cometa (fig. 25) constituida por una superficie plana bidimensional AB , cuyo centro de presiones estará en C , dotada de una cola rígida BX , la cual tiene como misión principal desplazar el centro de gravedad del conjunto al punto P . La cometa está sujeta por dos tirantes AG y DG que se unen en el punto G a la cuerda de amarre, que termina en el suelo sujeta en V . Las fuerzas que actúan en la cometa son el peso mg , la sustentación N y la tensión de la cuerda T_G . La cometa se encuentra sujeta por un hilo de densidad μ , que se comporta como perfectamente flexible e inextensible, en cuyo extremo está amarrada a tierra en el punto V .

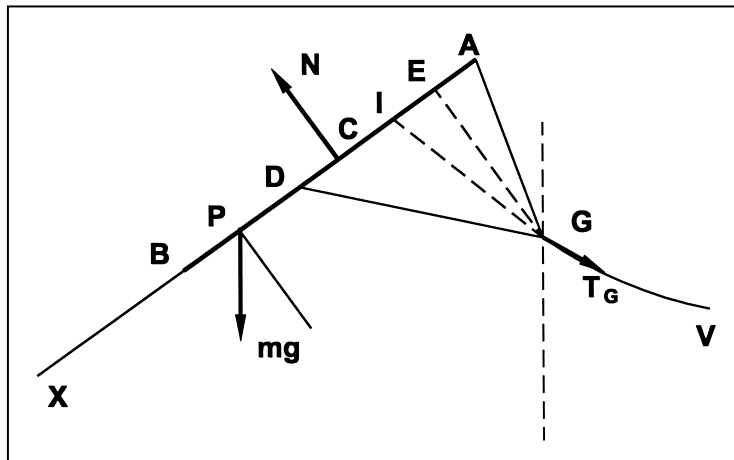


Fig. 25

Juan analiza mecánicamente el comportamiento del sistema con gran detalle, obteniendo la posición en función de la velocidad del viento, el ángulo de cada punto de la cuerda y particularizando para dos casos: aquél viento en que la cometa con una

longitud de hilo dada se despega del suelo, y la longitud de hilo para que con un viento dado se eleve a la máxima altura. Para esto utiliza su teoría, en la que $N=Rv\text{sen } \alpha$, que hace más fácil de manejar las ecuaciones⁵⁴. Tras todos los análisis matemáticos pasa a un caso práctico en el que simplifica la geometría de modo que $e=b$ y $c=2e$, lo cual hace que las fórmulas sean asimismo más sencillas. Como valores prácticos considera la cometa como un cuadrado de 3 pies de lado, un peso de media libra y un peso del hilo de una libra por cada 2000 pies de lo que le resulta para $R=19$ (277 N/m/s) Calcula que esta cometa con un viento de 2 pies/s (0,61 m/s) se elevaría a la máxima altura cuando el hilo fuese de 1052,6 pies (322 m). Con este mismo viento y un hilo de 2105, 2 pies (642 m) iniciaría el despegue del suelo⁵⁵.

Para comparar su teoría con la del impacto hace una simplificación más a la cometa tomando $c=0$, con lo que se identifica con las fórmulas que había hallado Euler. La fuerza según éste sería $N=rv^2\text{sen}^2 \alpha$, frente a la $N=Rv\text{sen } \alpha$ suya, que numéricamente corresponderían a $r=9/29^2$ (0,5107 N/m²/s²) frente a $R=19$ (276,6 N/m/s) con un hilo de 1000 pies (305 m).

Siguiendo la teoría del impacto, para que esta cometa se eleve hasta la horizontal Juan calcula que se precisa un viento de 29 pies/s (8,84 m/s), mientras que según su teoría sólo se necesitarían 0,0278 m/s. Ante esto advierte que con 29 pies/s el viento sería huracanado, y que ello va contra la experiencia. En realidad Juan había cometido un error⁵⁶ con anterioridad y el valor que tenía que haber obtenido era 18 pies/s (5,49 m/s) en vez de los 29 pies/s, aunque aún con esta velocidad, su observación sigue siendo cierta. No obstante, el argumento de usar la cometa como ejemplo es débil al aportar resultados más bien estimativos.

Máquina de Smeaton

En 1759 John Smeaton presentó ante la Royal Society el trabajo «An experimental Enquiry concerning the natural Powers of Water and Wind to turn Mills, and other Machines, depending on a circular Motion» que se publicó ese mismo año en las *Philosophical Transactions*. En la misma Smeaton incluye los resultados de una extensa labor experimental llevada a cabo con dos máquinas a escala reducida con las que pretende analizar el comportamiento de una rueda hidráulica y un molino de viento. La primera de ambas, que es a la que se refiere Jorge Juan en el Apéndice 2 y que reproducimos (fig. 26), consistía básicamente en una ruedas de paletas encajona-

⁵⁴ El valor del parámetro R se deduce de la ecuación [61] como $R=\rho_a\sqrt{(2gz_e)}S$. El valor de $\rho_a\sqrt{(2gz_e)}$ lo estudia en el Vol. 2 §259-261, aunque para el total de R [Ap. 1, §48] aplica la reducción de 1/3 hallada en los experimentos.

⁵⁵ Rehechos los cálculos se encuentran algunas discrepancias no significativas.

⁵⁶ Este error lo había advertido Levêque y lo hace constar en la edición francesa del *Examen*.

da en un canal por el que circula una corriente de agua, proveniente de la descarga de un depósito por una salida inferior, cuya abertura se regulaba en altura por medio de una compuerta. El agua, una vez pasada la rueda, cae a otro depósito desde donde se la eleva al primero por una bomba de émbolo. El caudal del agua se determina por el número de emboladas por minuto de esta bomba, y la velocidad mediante el giro libre de la rueda, con algunas correcciones. La rueda lleva acoplado un tambor al que se arrolla una cuerda de la que pende un peso, que se eleva como consecuencia del movimiento. Smeaton variaba la profundidad de la corriente mediante la compuerta de apertura y la velocidad por la altura del agua en el depósito; fijadas éstas dos condiciones, cada ensayo consistía en incrementar progresivamente el peso hasta llegar a la detención de la rueda, registrando las velocidades. Con las cargas y velocidades determinaba el producto de ambas, que denomina «efecto». Este será nulo cuando no hay carga, y por tanto la rueda gira libremente, y con la carga máxima, en que la rueda se detiene, entre ambos extremos existe un máximo. En la reducción de los datos empleó una técnica experimental muy elaborada con el fin de eliminar el efecto de los rozamientos y para determinar los parámetros de tarado del sistema.

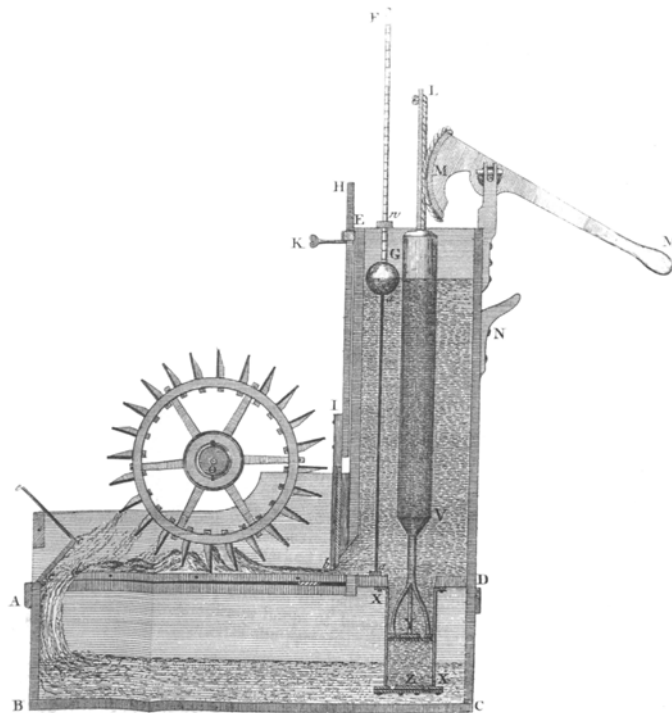


Fig. 26

Las teorías de la época establecían que en una máquina de este tipo el efecto máximo se conseguía cuando la velocidad lineal de la pala era un tercio de la de la corriente, mientras que con la teoría de Juan sería $v_0=v/2$ ⁵⁷. Por esto analiza los resultados de Smeaton, intentando demostrar que son más concordantes con su teoría que con la del cuadrado.

Smeaton presenta 27 ensayos, divididos en seis tandas, una para una sección de paso del agua, y en cada una para varias alturas del agua en el depósito. En cada ensayo determina la carga y velocidad de máximo efecto, de los que hemos obtenido la relación entre las velocidades de la pala y la corriente, v_0/v_a , en función de la velocidad del agua para cada uno, que presentamos en la fig. 27. Se aprecia que todos los valores se encuentran entre 0,33 y 0,5 lo que es interpretado por Juan como un apoyo a su teoría, alegando: «porque no se halla ni una sola experiencia de las 27 que expone, que no dé la velocidad de los álabes mayor que la tercera parte de la velocidad del agua: llegando el exceso hasta dar algunas la mitad» [Ap. 2]. Su apreciación es exagerada pues los datos casi se acercan más a 0,33 que a 0,50, como se sigue de dicha figura. Además Juan enfrenta dos fórmulas:

$$\begin{aligned} RA(V_a - V_p)^2 &= rP + nP + fF \\ rA(V_a - V_p) &= rP + nP + fF \end{aligned} \quad [71]$$

La primera resulta de la teoría del cuadrado, mientras que la segunda es la suya. En ambas rP es el momento de la fuerza, nP el del rozamiento debido al peso y fF el debido al peso de la rueda. Juan calcula el efecto considerando $E=(rP+nP)v_p$ e ignorando el término fF . Sin embargo, Smeaton halla el máximo con la totalidad del momento y de éste deriva el efecto. Además, este autor advierte que el comportamiento de la pala diferirá del que tendría en una corriente libre, pues en ésta hay espacio lateral para que el agua escape, mientras que en la máquina se encuentra encajonada y no hay otro escape más que moviéndose junto con la pala⁵⁸.

⁵⁷ Que conozcamos, el primero que llegó a esta conclusión fue Parent, como expone en «Sur la plus grande perfection possible des Machines», en las *Mémoires de la Académie* de París, 1704. El resultado de un tercio es fácil de obtener. Si la velocidad de la corriente es v y la pala v_0 , la fuerza total sería tal como $k(v-v_0)^2$ y el efecto $kv(v-v_0)^2$, cuyo máximo resulta para $v_0=v/3$. Como para Juan la fuerza es $k(v-v_0)$, esa relación queda como $v_0=v/2$.

⁵⁸ Cf. *op. cit.* p. 113

El movimiento del navío

Otro de las fuentes de confirmación de su teoría es el «andar o movimiento» del navío impulsado por el viento en sus velas. Pero, al igual que en los dos casos anteriores, también se mueve en el terreno de lo cualitativo. Su argumentación se resume en que las velocidades del navío calculadas con su teoría son las que se dan en la práctica, mientras que eso no sucede cuando se aplican las teorías de la resistencia según el cuadrado. En su crítica a éstas arguye que para que el barco ande a las velocidades normales esas teorías predicen la necesidad de vientos muy fuertes. Esto es, evidentemente, bastante ambiguo ya que en la época no tenían un procedimiento preciso para la medida del viento⁵⁹. En este sentido, Juan emplea en sus cálculos vientos entre 10 y 40 pies/s (3 y 12 m/s) de los que dice: «las velocidades del viento no pueden ser muy apartadas de las que asignamos» [Vol. 2, §352, nota p. 248]. Cita a Mariotte, que en el *Traité du mouvement des eaux* asegura haber medido la velocidad del viento y dice «que el que corre 24 pies/s (7,8 m/s) es bastante violento, de suerte que cuesta trabajo caminar contra él» [*Ibid*]. Sigue con Mr. Clare de la Royal Society que dice lo mismo en su *The motion of fluids* y termina con Mr. Derham, también de la Royal Society que también había hecho varias experiencias y que afirma (*Phil. Trans*, n. 313) «que el que corre a 66 pies ingleses (20 m/s) es una tempestad fuerte, y si más, un huracán» [*Ibid*]. Sigue Jorge Juan:

Yo hice con este motivo varias experiencias en Cádiz, acompañado de algunos oficiales, arrojando plumas muy delicadas, y en muchas ocasiones confirmé lo que dice Mr. Mariotte. Siempre hallé que el viento que corre a 20 pies ingleses por segundo [6,1 m/s], es bastante fuerte, y que los navíos yendo de bolina, apenas pueden sostener sus gaviás enteramente arriba... El regular de las brisas de verano, que observé diariamente en aquella ciudad, es de 10 a 15 pies ingleses por segundo [3,1-4,6 m/s]. [*Ibid*]

Aunque no sea citado por Juan, Bouguer en *De la Manoeuvre des Vaisseaux*⁶⁰ al evaluar el efecto comparativo de la resistencia en el aire y en el agua dice: «Un viento parecido [100 pies/s=32,5 m/s] forma una verdadera tempestad, y la más grande velocidad con la cual las velas son impelidas cuando se navega no es jamás apenas la mitad de aquél»⁶¹.

⁵⁹ Bouguer en el *Traité du Navire* [Libro III, Sec. I, Cap. II, §II] cita varios instrumentos para la medida del viento que dice que se llaman «anemómetros». En concreto menciona el de Wolff, el de d'Onsen-Bray y el de Poleni. Bouguer propone un aparato [op. cit. fig. 68] que era una placa plana que en su centro tenía un mango y muelle, tal que enfrentada al viento se comprimía el muelle más o menos, lo que le valdría como indicador de la velocidad.

⁶⁰ Publicado en 1757 y sólo citado por Juan en una ocasión (Tomo I, p. 20).

⁶¹ Libro I, Sec. III, Cap.I, p. 184.

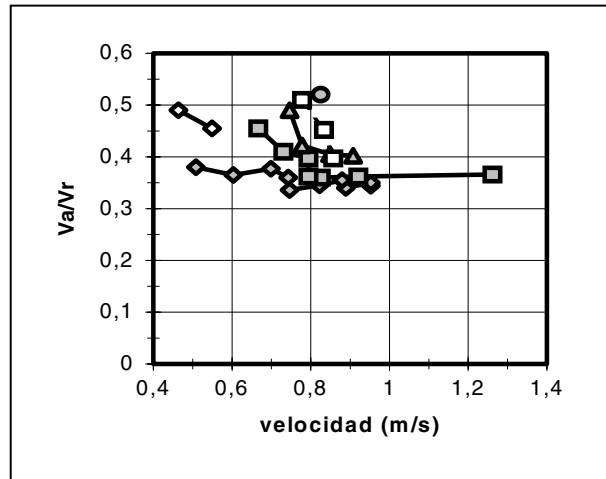


Fig. 27

Tras estos breves comentarios veamos los cálculos que hace Juan. Éste dice que:

tres son los movimientos progresivos, que hemos de distinguir en el navío: uno que se dirige según la quilla, que llamaremos directo: otro, según la perpendicular a ésta, que llamaremos lateral; y el tercero, que será el compuesto de los dos antecedentes, y por consiguiente el verdadero rumbo que siga el navío, que llamaremos oblicuo. [Vol. 2, §336]

En la fig. 28 se representa un esquema de un buque en el que se han representado los tres como u , v , y V .⁶² En dicha figura el viento, designado como w , incide en la vela HI con un ángulo α produciendo una fuerza F_V que formará un ángulo ε con la perpendicular a la cuerda de la vela⁶³. Para Juan «la fuerza que hace el viento en las velas, según la dirección de la quilla,... se equilibra con la resistencia directa del agua en la proa; lo mismo sucede con la velocidad lateral» [§ 337]. La resistencia según la quilla es el resultado de aplicar su teoría a una corriente en esa dirección, y la lateral a una que sea perpendicular a la quilla. Esto vendría expresado por dos ecuaciones:

$$F_Q = \rho_{mar} r_q u; \quad F_L = \rho_{mar} r_l v \quad [72]$$

⁶² Juan considera una cuarta velocidad que es la componente de V sobre la dirección del viento y que llama como la velocidad que sale a barlovento. Es la también designada como lo que se gana al viento.

⁶³ Recuerda que en lenguaje marinerio si $\gamma < 90^\circ$ se navega de bolina, si $\gamma > 90^\circ$ es a viento largo y si $\gamma = 180^\circ$ es con viento de popa.

La fuerza normal del viento será:

$$F_v = \rho_a S_v G w_n \quad [73]$$

Ecuación en la que ρ_a es la densidad del aire y w_n la componente normal del viento sobre la vela, la cual se relaciona con el resto de las variables como:

$$w_n = w \operatorname{sen} \alpha - u \operatorname{sen} \beta - v \operatorname{cos} \beta \quad [74]$$

Para calcular las velocidades u y v iguala las componentes de F_N con las resistencias, lo que indica que supone ambas independientes. Esto sería:

$$F_Q = F_v \operatorname{sen}(\beta - \epsilon); \quad F_L = F_v \operatorname{cos}(\beta - \epsilon) \quad [75]$$

Como resultado de sustituir y operar se llega a las dos siguientes expresiones para u y v :

$$\frac{v}{w} = \frac{r_q k_a S_v G \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos}(\beta - \epsilon)}{r_q r_l + k_a S_v G r_q \operatorname{cos} \beta \operatorname{cos}(\beta - \epsilon) + k_a S_v G r_q \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen}(\beta - \epsilon)} \quad [76]$$

$$\frac{u}{w} = \frac{r_l k_a S_v G \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(\beta - \epsilon)}{r_q r_l + k_a S_v G r_q \operatorname{cos} \beta \operatorname{cos}(\beta - \epsilon) + k_a S_v G r_q \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen}(\beta - \epsilon)} \quad [77]$$

Estas dos ecuaciones, en las que k_a es la relación de densidad del aire y agua, son similares a las obtenidas por él [§ 339]⁶⁴.

Con la ayuda de estas ecuaciones, Juan opera y analiza con la ayuda de estas ecuaciones varios supuestos relativos a su navío de 60 cañones. Se extiende a tres clases de vientos: viento de popa, viento largo y de bolina. Aquí nos limitaremos a seguir el primer caso, en el que $\gamma = 180^\circ$, $\beta = \alpha = 90^\circ$ que por no existir velocidad lateral se reduce sólo la primera de las anteriores en la forma:

$$\frac{u}{w} = \frac{k_a S_v G}{r_q + k_a S_v G} \quad [78]$$

⁶⁴ Se recuerda que el factor de densidad lo toma como 1/20, y r y R para r_q y r_l respectivamente.

«Pongamos ahora que el navío de 60 cañones con viento suave navegue con trinquete, gavia, juanete mayor, dos alas y dos rastreras» [§ 350]. La suma de esta configuración vélica la evalúa como 12950 pies² (1205 m²), que sustituida con el valor de $r=294$ (267,5), con $G=1$, y $k_a=1/20$, le resulta aproximadamente $u=0,69w$. Con esta relación los vientos de 10 pies/s (3,05 m/s) hacen que el navío ande a 4,1 millas por hora, y si fuesen de 15 (4,6) serían 6,2. Si aumentan éstos más su velocidad bajará el valor de $G=7/8$, de lo que resulta $u=0,66w$, por lo que con el mismo aparejo andaría a 7,9 millas por hora. Si el viento aumentase más, también lo haría la velocidad del buque, ahora bien, el aparejo aguanta sólo un límite por motivos estructurales, por lo que continúa: «y si se pudiese aguantar el mismo velamen corriendo el viento 25 pies por segundo, andaría el navío... 9,9 millas por hora; lo que no se ve en la práctica: luego es prueba evidente de que el viento que corre 25 pies por segundo no es aguantable con todo el aparejo» [Ibid]. Por esto, Juan para velocidades mayores disminuye el velamen dejando el trinquete y la gavia, con lo que vuelve a calcular la relación que es $u=0,42w$, con sus consecuencias; y así sigue quitando trapo tomando tres rizos a la gavia para terminar con sólo el trinquete, cuya superficie es de 2610 pies² (243 m²), que lleva a $u=0,28w$. Con esta configuración y un viento de 40 pies/s andaría 6,72 millas por hora, y si llegase a 60 pies/s, valdría 10,08 millas por hora, de lo que dice: «lo que rara vez se verá: y así el viento que corra 60 pies por segundo será violentísimo» [Ibid].

Lo expuesto es una pequeña muestra del tono de sus análisis que se extienden en muchas páginas⁶⁵. Además aporta observaciones propias realizadas en la bahía de Cádiz. Anota que un bote con dos velas navegando a un viento largo, cuya velocidad medida era de 10,5 a 11 pies/s (3,2-3,4 m/s), tardó 30 minutos en recorrer una distancia de 16600 pies (5063 m). De esto se deduce que su velocidad era de 9,2 pies/s (2,8 m/s), lo que representa, según apunta, entre un $21/25$ y $21/23$ de la del viento, sobre lo que comenta: «relación bien distante de la que resulta por el sistema antiguo; pero muy conforme con el que ahora seguimos» [Nota, p. 251].

Para contrastar con los resultados que se derivan de la teoría del impacto toma el caso dado por Bouguer en su *Traité du Navire*⁶⁶, para el que obtiene que esa relación de velocidades es $u/w=0,298$, con la hipótesis de que la densidad del agua del mar es 576 veces la del aire, y que se reduce a $u/w=0,239$ si se toma para esa relación el valor de 1100. Juan corrige los cálculos para 1033 lo que le lleva a $u/w=0,25$. Sobre esto afirma:

Supongamos, pues, que este navío, siendo tan velero como se supone, ande 10 millas por hora con viento largo, lo que es bien regular y ordinario, porque llegan a 11 y más, y tendremos [con $u/w=0,25$]... con que el viento ha de correr 66,6 pies por segundo (20,3 m/s), o que

⁶⁵ Hasta el párrafo §352 y la nota de la p. 248 nombrada como (a).

⁶⁶ Cf. Libro 3, Sec. 2, Cap. 1. Se trata de un navío de 163 pies (53 m) con un velamen de 15474 pies² (1634 m²). La sección sumergida de la cuaderna maestra es 691 pies² (73 m²) que a efectos de resistencia equivalen a 150 pies² (15,8 m²) debido a la forma del casco, esto es un factor de 0,21.

ha de ser un huracán, como asegura *Mr. Derham*; consecuencia que se opone a todas las experiencias, y aun al hecho de llevar el navío nada menos que 15474 pies franceses cuadrados (1634 m²)... los que fuera imposible soportar con tan violento viento. [p. 250].

Juan también aplica esa teoría a su navío de 60 cañones. La parte sumergida de la cuaderna maestra es de 620 pies² (57,7 m²), que se reduce entre 1/7 y 1/8 para evaluar la superficie equivalente, que toma como 81 pies² (7,53 m²). Con la superficie vélica de 12950 pies² (1205 m²) el cálculo de la relación de velocidades es el siguiente:

$$S_v(w-u)^2 = k_q S_e u^2 \quad [79]$$

de lo que resulta $u/w=0,282$. Sobre este valor dice: «por repetidísimos experiencias un navío saca con todo el aparejo 6 a 7 millas por hora, que resultan de la velocidad de 10 a 13 pies por segundo [3-4 m/s]» [Nota p. 254]. Por lo que ese navío para llegar a esas velocidades necesitará un viento de 48 pies/s (14,6 m/s), respecto de lo que manifiesta: «lo que no conviene las experiencias» [*Ibid.*]. A continuación, como había hecho al aplicar su teoría, deja sólo el trinquete con el que suele andar el navío unas 9 millas y para lo cual se necesitaría un viento de 100 pies/s (30,5 m/s), que sería un huracán imposible de aguantar.

Como conclusión hemos de apreciar que obtiene las relaciones entre la velocidad del navío y la del viento a partir de su teoría y de la del impacto. Comparando estos resultados con los valores reales, de los que conoce con precisión la velocidad de los buques y con imprecisión la del viento, encuentra que hay una concordancia con su teoría, pero que no es así con la otra. De ello infiere la certeza de sus postulados y la falsedad de los otros.

13. PRECEDENTES DE SU TEORÍA

Si bien los planteamientos y las bases de la teoría de Juan son originales, hay un precedente en la obra de otro autor que llega a conclusiones similares, aunque por un camino distinto. En concreto nos referimos a Euler.

Euler tradujo al alemán y comentó extensamente los *New principles of gunnery* (1742) de Benjamin Robins. Éste criticaba la teoría del impacto, y muy especialmente el que siempre se forme un vacío tras el cuerpo móvil⁶⁷. Para él los fluidos se habían de clasificar en dos tipos: unos los que nunca dejan vacío, como sería el caso del agua, y otros los que lo dejan, pero en una magnitud dependiente de la velocidad, como sería el aire. Si en el seno de éste se mueve un cuerpo lentamente, el aire tendrá

⁶⁷ Cf. Cap. II, Prop. I.

tiempo de rellenar el hueco trasero; sin embargo, cuando la velocidad es muy rápida no dará tiempo a esa operación y se formará un vacío. Hay, obviamente, una situación intermedia en la que hay un relleno parcial. Robins estimaba que la resistencia de una esfera a baja velocidad era el valor que había dado Newton para este cuerpo cuando se movía en un líquido⁶⁸, mientras que si el movimiento fuese rápido este valor se multiplicaría por tres⁶⁹. Todo lo anterior lo complementaba con una serie de experimentos realizados con un pequeño cañón y balas esféricas, que disparaba con varias cargas de pólvora y cuya velocidad registraba en varios puntos de la trayectoria usando péndulos balísticos⁷⁰. Además, Robins daba un valor para la velocidad máxima, en la cual se formará el vacío, y presentaba una regla para los casos intermedios⁷¹.

La traducción al alemán de esta obra apareció en 1745, pero en la misma Euler incluyó unos extensos comentarios en los que extendió y explotó las ideas de Robins con la ayuda de sus grandes conocimientos matemáticos⁷². En éstos introdujo, por primera vez, la noción de flujos currentilíneos y llevó a cabo una explotación muy rigurosa de los resultados experimentales.

Para definir la velocidad a la cual se producía un vacío total, Euler supuso que dado que el aire, en cierta forma, cae dentro del hueco producido en el movimiento, la velocidad de entrada debía de ser la correspondiente a una altura cinética igual al espesor equivalente de la atmósfera, que es $v_a^2 = 2gh_a$. Por tanto si la velocidad de avance es superior a ésta, habrá vacío en la parte trasera. Además, para la resistencia en esta condición supuso que sería la suma de una columna cuya altura fuese igual a la cinética, más otra igual a la altura de la atmósfera equivalente. De esto resultaría:

$$F_X = \frac{1}{2} \rho_a S C_D v^2 + \rho_a g S h_a = \frac{1}{2} \rho_a S (v^2 + v_a^2) \quad [80]$$

Donde $C_D = 1$. Para una velocidad menor, Euler conjetura que a ese valor habría que restarle el peso de la columna de aire correspondiente a una la altura cinética de $v_a - v$, con lo que la fórmula anterior se convertiría en:

$$F_X = \frac{1}{2} \rho_a S (v^2 + v_a^2 - (v_a - v)^2) = \rho_a S v v_a \quad [81]$$

⁶⁸ Recordemos que era $C_D = 0,5$. *Principia* Prop. XXXVIII.

⁶⁹ *Ibid.*

⁷⁰ *Ibid.* Prop. II

⁷¹ *Ibid.* Prop. III

⁷² Hay una traducción al francés como *Nouveaux principes d'Artillerie* (1783).

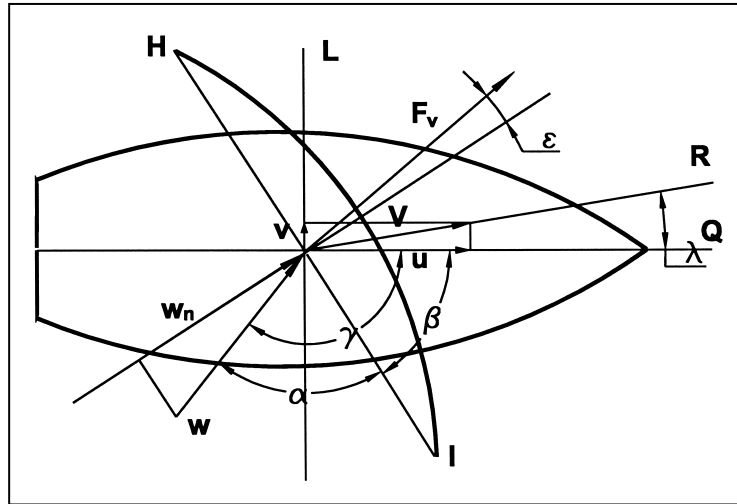


Fig. 28

La hipótesis se cumple tanto cuando $v=v_a$ como si $v \ll v_a$, pero lleva a la sorprendente conclusión de que la resistencia es proporcional a la velocidad, en contra de la hipótesis de partida. Ante esto Euler afirma que:

parece que el razonamiento anterior no está absolutamente falto de solidez. Sea lo que fuere, la naturaleza de los fluidos no es lo bastante conocida para que por la sola teoría y sin ayuda de la experiencia se puedan determinar todas las circunstancias de su movimiento y su manera de actuar, será inútil seguir en la idea que venimos a formarnos de la acción del aire y de los otros fluidos sobre los cuerpos sólidos, a menos, como veremos a más adelante, que ella no pueda ser confirmada por la experiencia⁷³.

Los caminos de Juan y Euler son diferentes, aunque la conclusión es casi idéntica, e incluso en la llamada a la experiencia. No sabemos si Juan llegó a conocer estos comentarios, pues a tenor del contenido de su biblioteca particular no conocía el idioma alemán⁷⁴. Ahora bien, Juan estuvo en Londres en 1749 y era conocido de

⁷³ Cf. *op. cit.* p. 322 de la edición francesa. Es el cuarto comentario a la Prop. I.

⁷⁴ El contenido de la biblioteca particular de Jorge Juan nos es conocido porque está relacionado en el Inventario de sus bienes que se conserva en el Archivo Histórico Municipal de Elche. Dicho documento ha sido analizado por Rafael Navarro Mallebrera y Ana María Navarro Escolano y el resultado, junto con la transcripción, se ha publicado como *La Biblioteca de Jorge Juan*, Alicante, 1987. En total disponía de 408 volúmenes, casi en su totalidad de carácter científico. Además de los textos en castellano, los hay

Robins⁷⁵, por lo que pudiera haber tenido conocimiento de la traducción de Euler a través de éste. Opinamos que no debió de ser así, pues el prestigio de Euler era muy grande y es muy plausible que si Juan lo hubiese conocido lo habría citado en el *Examen* para avalar su propia teoría apoyándose en la autoridad de aquél.

14. COMENTARIO FINAL

Y para finalizar, tras este repaso por algunos de los aspectos del *Examen*, a nuestro parecer los más interesantes desde el punto de vista teórico, podemos volver a las cuestiones planteadas al principio, aunque con algunas matizaciones. Así, más que indagar sobre cuándo se escribió el *Examen*, podríamos preguntarnos qué posición ocupa en la evolución de la Mecánica de los fluidos. A ello contestaríamos que su posición está tras los tratados navales de Bouguer y Euler, y más remotamente relacionado con los *Principia* de Newton. Su teoría no es la del impacto, aunque comparte algunos de sus presupuestos, y está todavía alejada de las ideas currentilíneas de mediados del siglo. Esta es una de las argumentaciones a favor de que la redacción del *Examen* fue muy anterior a su publicación. La segunda cuestión sería por qué escribió esta obra. En la carta al Marqués de la Ensenada desde Londres, mencionada al principio⁷⁶, al hablar de la construcción naval y tras lamentarse de que ese arte o está en manos de practicones sin idea de geometría o en grandes teóricos que no saben lo que son las furias del mar, se ofrece para escribir una obra sobre el tema. Juan considera que tiene fundamentos teóricos suficientes para acometer la tarea, pero que carece de los prácticos, por lo que solicita planos de navíos construidos para su examen y comentar las características de los mismos con sus capitanes. Es claro que lo que busca son unas herramientas que ayudase para la construcción de navíos, o con palabras actuales, para el diseño. Ello no le resta ni un ápice al mérito, si acaso se lo acrecienta, de que se atreviera a formular una teoría completa de los fluidos que le abriese camino para llegar a la teórica naval y de ahí al buque, puesto que los tratados de la época no le satisfacían.

Este proceder añade a la figura de Jorge Juan, marino por voluntad y científico por vocación, la faceta de ser uno de los precursores de la moderna ingeniería, que junto con hombres como Borda, Coulomb, Bouguer, Chapman entre otros, separaron la artesanía, dignísima pero una habilidad, para entrar en el reino donde la naturaleza se domina más con la potencia del intelecto que con los recursos de las manos y herramientas. Los viejos métodos artesanales cedían el paso a una nueva racionalidad

en latín, francés e inglés. Aparte de esta biblioteca, Juan también tenía acceso a la del Observatorio de San Fernando, Cádiz, donde todavía se conservan las colecciones más importantes de la época.

⁷⁵ Cf. nota 8.

⁷⁶ Cf. nota 7.

matemática cuyo referente sería la denominada «física exacta»⁷⁷. El navío, concebido como resultado de la unión de la mecánica y la pura práctica, dicho sea con palabras de Juan, representa un salto cualitativo ya que es el precursor de los futuros entes técnicos, resultantes de la conjunción del método científico con los procesos de fabricación, que definirán la nueva era que entonces se iniciaba.

⁷⁷ Véase al respecto SELLÉS, M. (1999), «Jean-Charles Borda (1733-1799): la física exacta en la Francia del siglo XVIII», *Revista Española de Física*, vol. 13, 2, pp. 50-55.