Asclepio. Revista de Historia de la Medicina y de la Ciencia, 2006,
vol. LVIII, nº 1, enero-junio, págs. 113-148, ISSN: 0210-4466

LA PARADOJA DE GALILEO*

Manuel Sellés García

Dpto. de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia, UNED

RESUMEN

Este artículo aborda las concepciones acerca de los indivisibles que Galileo expuso en los *Discorsi* y explora su aplicación al estudio de los movimientos uniformemente acelerados. Propone reconsiderar el concepto de velocidad «total» atribuido a Galileo interpretándolo, no como una superficie, sino como una colección infinita de grados de velocidad. Asimismo se sugiere interpretar el momento de la velocidad como la medida de la aceleración, lo que contribuye a tender un puente entre las concepciones de Galileo y de Newton.

PALABRAS CLAVE: Galileo, indivisibles, mecánica, velocidad, momento, fuerza.

ABSTRACT

This paper discusses the conceptions about indivisibles displayed in Galileo's *Discorsi*, and explores their application to the study of uniformement accelerated motions. I suggest to reconsider the holistic velocity concept that has been attributed to Galileo and to interpret it as an infinite collection of velocity degrees. I also suggest to interpret the moment of velocity as the measurement of acceleration. This can contribute to fill the gap between the conceptions of Galileo and Newton.

KEY WORDS: Galileo, indivisibles, mechanics, velocity, moment, force.

Si bien los estudios sobre la obra de Galileo son muy numerosos, las concepciones indivisibilistas que presentó en la Primera Jornada de los *Discorsi* han recibido una atención bastante escasa. Estas concepciones se siguen interpretando como un precedente poco refinado del análisis infinitesimal o como una aplicación discutible del método de indivisibles que desarrolló su contemporáneo y discípulo Bonaventura Cavalieri. Desde tales puntos de

* Parte del contenido de este trabajo se dio a conocer en el Eurosymposium Galileo 2001 y fue publicados en sus actas: véase SELLÉS, M. (2001), «La teoría de indivisibles de Galileo y su geometrización del movimiento», en MONTESINOS, J. y SOLÍS, C. (eds.), *Largo campo di filosofare*, La Orotava (Tenerife), Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, 445-456. La versión que aquí se presenta amplía esta primera versión y aspira a presentar un panorama completo.

vista, se considera que algunos pasos de su geometrización del movimiento exhiben un «problema de fundamentos» sólo feliz y posteriormente resuelto con los cálculos que configurarían Newton y Leibniz.

Un examen más detenido de la teoría de indivisibles de Galileo, sin embargo, pone de manifiesto su coherencia interna y su papel crucial, a la par que limitado, en la fundamentación de su estudio del movimiento. En las páginas que siguen espero poner de relieve esta circunstancia, mostrando que los problemas de fundamentos arriba aludidos no son más que limitaciones inevitables propias de una teoría de este tipo. Esto no quiere decir, sin embargo, que las concepciones indivisibilistas de Galileo careciesen de sus propios problemas de fundamentación.

1. El infinito y los indivisibles

En la concepción euclídeo-aristotélica, el todo es anterior a sus partes. Estas partes nunca llegan a ser últimas: la magnitud continua es divisible en partes siempre divisibles. Por el contrario, dentro del espíritu mecanicista, sea atomista o plenista, del siglo XVII, los todos resultan de la agregación de sus partes —las partes son anteriores al todo— y, en definitiva, las magnitudes finitas que se presentan a nuestros sentidos —o a nuestra consideración matemática— son composiciones o resultados de sus elementos integrantes. Para Galileo estos elementos últimos son indivisibles: los cuerpos están compuestos por átomos de materia, y las entidades geométricas por puntos matemáticos. Cabe suponer que la lectura de la naturaleza en clave matemática fue cuanto menos una de las razones que le llevaron a considerar estos átomos como inextensos y, por ende, como componentes en número infinito de cualquier porción extensa de materia.

En el plano geométrico, la razón que da Galileo para sostener que el continuo está formado por indivisibles parte de la misma idea aristotélica de una divisibilidad indefinida:

> «[...] siendo que la línea y todo continuo son divisibles en [partes] siempre divisibles, no veo cómo se pueda eludir que su composición sea de infinitos indivisibles, porque una división y subdivisión que se pueda proseguir perpetuamente supone que las partes sean infinitas, ya que de otro modo la subdivisión sería terminable; y de ser las partes infinitas se saca en consecuencia que son inextensas, porque [partes] extensas infinitas hacen una extensión infinita: y así tenemos al continuo compuesto por infinitos indivisibles»[1].

[1] «[...] stante che la linea ed ogni continuo sian divisibili in sempre divisibili, non veggo come si possa sfuggire, la composizione essere di infiniti indivisibili, perchè una divisione e

Frente a la concepción del infinito de Aristóteles, Galileo introduce aquí la noción de un infinito actual, «terminado». El infinito aristotélico es algo que no tiene fin, que carece de límites. Un proceso de división del continuo que, por su propia naturaleza, nunca termina, no puede tener un final. El infinito actual de Galileo, sin embargo, constituye ese final. La confrontación entre ambos conceptos de infinito entra en juego en el diálogo subsiguiente. Cuando Salviati, el portavoz de Galileo, pregunta al escolástico Simplicio si las partes extensas en una magnitud continua son finitas o infinitas, éste responde que son infinitas en potencia, pero finitas en acto. Ahora bien, desde la posición de Galileo, según la cual las partes anteceden al todo, no hay distinción en este caso entre potencia y acto: todas las partes potenciales del continuo deben hallarse actualizadas; se separen efectivamente o no, dichas partes están siempre presentes como tales y, siendo extensas, su número no puede ser infinito[2]. Y, así, el infinito de Aristóteles se transforma en lo que Galileo denomina un «término medio» entre lo finito y lo infinito (actual). Estas partes resultan:

> «[...] no ser ni finitas ni infinitas, sino tantas cuantas responden a cualquier número dado: para esto es necesario que no estén comprendidas dentro de un número limitado, porque no responderían a uno mayor; aunque no es necesario que sean infinitas, porque ningún número asignado es infinito: [...]»[3].

---

subdivisione che si possa proseguir perpetuamente, suppone che le parti siano infinite, perchè altramente la subdivisione sarebbe terminabile; e l'esser le parti infinite si tira in consequenza l'esser non quante, perchè quanti infiniti fanno un'estensione infinita: e così abbiamo il continuo composto d'infiniti indivisibili». *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze*, Leiden, 1638, en FAVARO, A. (ed.), (1890-1909), *Le Opere di Galileo Galilei. Edizione Nazionale*, ed. A. Favaro, Florencia, G. Barbèra, vol. VIII (reed. 1968), p. 80. En lo sucesivo se citará abreviadamente: EN, VIII, 80.

[2] La división de la que aquí se trata es una división en partes alícuotas. Pues una magnitud continua puede dividirse en infinitas partes extensas proporcionales, p. ej. mediante la sucesión 1/2, 1/4, 1/8, ..., como ya sugirieron algunos filósofos medievales. Véase, p. ej., MOLLAND, G. (1983), «Continuity and Measure in Medieval Natural Philosophy», en *Miscellanea Mediaevalia*, Berlín y Nueva York, Walter de Gruyter, XVI, pp. 136-137. El argumento de que una infinitud de partes extensas formaría una magnitud infinita fue introducido por Simplicio en sus comentarios a la *Física* de Aristóteles. Véase FURLEY, D.J. (1982), «The Greek Commentators'Treatment of Aristotle's Theory of the Continuous», en KRETZMANN, N. (ed.), *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought*, Ithaca y Londres: Cornell Univ. Press, pp. 17-36, esp. p. 34.

[3] «[...] non esser nè finite nè infinite, ma tante che rispondono ad ogni segnato numero: per il che fare è necessario che elle non siano compresse dentro a un limitato numero, perchè

Galileo cuida de señalar aquí que está hablando de cantidades discretas, que son las que intervienen en un proceso de división sucesivo. Tal proceso, conviene, nunca llegaría a un final: dividir un segmento de línea primero en dos partes, luego en cuatro, etc., es un proceso que nunca conducirá a los infinitos puntos de una línea:

> «[...] con tal orden, quien creyese encontrar sus infinitos puntos se engañaría completamente, porque con tal progreso ni siquiera en la eternidad llegaría a la división de todas las partes extensas: [...]»[4].

Para llegar a los puntos, a esa división que califica de «última y suprema», hay que emplear otro método:

> «[...] distinguir y resolver toda la infinitud de un solo golpe»[5].

El artificio empleado por Galileo es espectacular, pero aparentemente poco práctico. Tras hacer admitir a Simplicio que para dividir una línea bastaría con señalar un punto en ella, plegándola de forma que dicho punto constituyese el vértice de un polígono, Salviati toma la línea y la curva como circunferencia de un círculo, considerándolo como un polígono de lados infinitos:

> «No se puede negar que tal resolución se ha hecho en sus infinitos puntos, no menos que la de sus cuatro partes al formar un cuadrado, o la de sus mil al formar un milágono [un polígono de mil lados]; pues en ella no falta ninguna de las condiciones que se encuentran en el polígono de mil y en el de cien mil lados. Éste, aplicado a una línea recta, se dispone sobre ella tocándola con uno de sus lados, es decir, con su cienmilésima parte; el círculo, que es un polígono de infinitos lados, toca a la misma recta con uno de sus lados, que es un único punto, diverso de todos sus colaterales, y por tanto separado y distinto no menos que lo es un lado del polígono de sus conterminales: y como el polígono que gira sobre un plano imprime con los contactos consecutivos de sus lados una línea recta igual a su perímetro, del mismo modo el círculo que gira sobre un tal plano describe con sus infinitos contactos sucesivos una línea recta igual a su propia circunferencia»[6].

---

non risponderebbono ad un maggiore; ma nè anco è necessario che elle siano infinite, perchè niuno assegnato numero è infinito: [...]». EN, VIII, 81.

4 «[...] col qual ordine chi credese di trovare i suoi infiniti punti, s'ingannerebbe indigrosso, perchè con tal progresso ne men alla division di tutte le parti quante si perverrebbe in eterno: [...]». EN, VIII, 82.

5 «[...] distinguere e risolvere tutta la infinità in un tratto solo». EN, VIII, 93.

6 «Nè si puo negare, tal risoluzione esser fata ne'suoi infiniti punti non meno che quella

Si las figuras geométricas están compuestas por sus indivisibles, entonces éstos —a diferencia de los límites en la concepción euclídeo-aristotélica— constituyen por derecho propio una parte de la figura en cuestión, compartiendo su naturaleza. Así, un punto resulta ser la menor de las líneas, y como tal constituye el lado de ese polígono de infinitos lados que es el círculo. Esta es la razón de que, en el tránsito de lo finito a lo infinitamente pequeño, el polígono conserve su naturaleza[7]. Pero cuando se pasa de lo finito a lo infinitamente grande, la naturaleza de las figuras geométricas se altera profundamente, y así Galileo habla de:

> «[...] la infinita diferencia, o mejor dicho repugnancia y contrariedad de naturaleza, que encontraría una cantidad terminada al convertirse en infinita»[8].

Para mostrarlo, dibuja (fig. 1) una recta AB, dividida en partes desiguales por un punto C. Demuestra que si desde los extremos A y B se trazan segmentos de líneas que guarden entre sí la misma razón que los segmentos AC y BC, los sucesivos puntos de intersección L, K, I, H, etc., caerán todos sobre la misma circunferencia o, lo que es lo mismo, si el punto C se desplaza continuamente sobre dicha circunferencia, en cada instante los segmentos AC y BC guardarán entre sí la misma razón. El radio será tanto mayor cuanto más se aproxime C al punto medio O; pero este punto,

> «[...] moviéndose para describir, como todos los otros de la línea AB (porque los puntos tomados en la otra parte OA describirán también sus círculos, tanto mayores cuanto más próximos estén los puntos al O), su propio círculo, para hacerlo el mayor de todos, y en consecuencia infinito, no puede retornar a su primer térmi-

---

delle sue quattro parti nel formarne un quadrato, o nelle sue mille nel formarne un millagono; imperò che in lei non manca veruna delle condizioni che si trovano nel poligono di mille e di cento mila lati. Questo, applicato a una linea retta, se gli posa sopra toccandola con uno de'suoi lati, che è un sol punto, diverso da tutti i suoi collaterali, e perciò da quelli diviso e distinto non meno che un lato del poligono da i suoi conterminali: e come il poligono rivoltato sopra un piano stampa con i toccamenti conseguenti de'suoi lati una linea reta eguale al suo perimetro, così il cerchio girato sopra un tal piano descrive con gl'infiniti suoi successivi contatti una linea retta egual alla propia circonferenza». EN, VIII, 92.

[7] Como se señaló más arriba, este tránsito no puede efectuarse mediante un proceso numerable. Es decir, no podemos llegar al círculo aumentando infinitamente el número de lados de un polígono; tal aumento correspondería a un infinito potencial, no actual, a ese «término medio» que Galileo sitúa entre lo finito y lo infinito.

[8] «[...] l'infinita differenza, anzi repugnanza e contrarietà di natura, che incontrerebbe una quantità terminata nel trapassar all'infinita». EN, VIII, 83.

no, y en suma describe una línea recta infinita como circunferencia de su círculo infinito. Considerad ahora la diferencia que hay de un círculo finito a uno infinito, ya que éste cambia de tal modo su ser, que pierde totalmente el ser y el poder ser: ya comprendemos bien claramente que no se puede dar un círculo infinito; de lo que se saca en consecuencia que no menos puede ser una esfera infinita, ni cualquier otro cuerpo o superficie con figura e infinito. ¿O qué diremos de tal metamorfosis en el paso de lo finito al infinito?»[9].

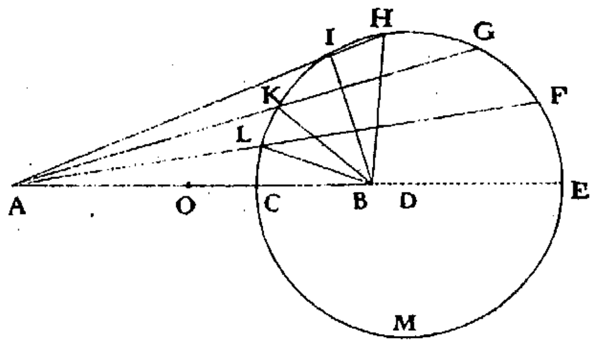

Fig. 1.

Nótese que el tránsito de lo finito a lo infinito se ha realizado mediante un movimiento continuo del punto C, el cual se aproxima a O y lo alcanza. Ninguna subdivisión del intervalo OC en partes progresivamente menores alcanzaría al punto C: el infinito sólo se puede alcanzar mediante un proceso continuo como el del movimiento, que contiene en sí al mismo infinito al ser infinitamente divisible[10].

[9] «[...] mossosi per segnar, come tutti gli altri della linea AB (perchè i punti presi nell'altra parte OA descriveranno essi ancora i lor cerchi, ed i massimi i punti prossimi all'O), il suo cerchio, per farlo massimo di tutti, e per consequenza infinito, non può ritornare nel suo primo termine, ed in somma descrive una linea retta infinita per circonferenza del suo infinito cerchio. Considerate ora qual differenza sia da un cerchio finito a un infinito, poichè questo muta talmente l'essere, che totalmente perde l'essere e il poter essere: chè già ben chiaramente comprendiamo, non si poter dare un cerchio infinito; il che si tira pio in consequenza, nè meno poter essere una sfera infinita, nè altro qualsivoglia corpo o superficie figurata e infinita. Or che diremo di cotali metamorfosi nel passar dal finito all'infinito?». EN, VIII, 85.

[10] Sobre la diferencia entre los conceptos de infinito de Galileo y Leibniz, véase E. Knobloch (1999), «Galileo and Leibniz: Different Approaches to Infinity», *Arch. Hist. Exact Sci.*,

 Asclepio, 2006, vol. LVIII, nº 1, enero-junio, 113-148, ISSN: 0210-4466

En definitiva, en el tránsito de lo finito a lo infinitamente grande se pierden los límites y con ellos la esencia de las figuras geométricas: una extensión infinita no puede estar limitada. Pero cuando se pasa de lo finito a lo infinitamente pequeño lo que desaparece es la extensión, quedando los límites que, como en el caso de los puntos extremos del segmento de línea que constituye un lado del polígono, vienen a coincidir y confundirse en uno solo.

2. La estructura del continuo

La idea de un continuo formado por entidades inextensas surgió en la Edad Media, primero en el Islam y más tarde, en el siglo XIV, en el occidente latino[11]. Quienes defendieron que estaba compuesto de un número infinito de indivisibles tuvieron que enfrentarse, en general, a dos cuestiones. La primera atañía al modo concreto en que los indivisibles podían disponerse de tal modo que diesen lugar a una magnitud extensa. La segunda se refería a la existencia de razón entre los agregados de infinitos indivisibles que constituían dos magnitudes extensas, pero desiguales. El trasfondo de la discusión eran las ideas de Aristóteles, quien estableció tres modos de disposición entre las cosas: la sucesión, el contacto y la continuidad. Se hallan en sucesión cuando podían disponerse en orden de primero, segundo, tercero, etc., sin que entre ellas pudiesen interponerse otros elementos de la misma naturaleza. Están en contacto si, hallándose en sucesión, sus extremos están juntos; y forman finalmente un continuo si, además, estos extremos se tornan uno y el mismo[12]. Siendo así, los puntos no pueden estar en contacto o formar un continuo, pues siendo indivisibles no tienen un extremo distinto de alguna otra parte; y una cosa que está en contacto con otra lo estará todo con todo, parte con parte, o parte con todo,

---

54, 87-99. Un concepto de infinito similar al de Galileo sería el que conlleva el concepto de «momento» de Newton, que se estudia en M. A. Sellés (1999), «Isaac Newton y el infinitesimal», *Theoria*, 14, 431-60. Allá donde he distinguido entre un infinito «potencial» -o, si se quiere, «potencial actualizado» y otro «actual», Knobloch los denomina, respectivamente, siguiendo en cierto modo a Galileo, como «quanta» y «non quanta»: el primero sería medible, el segundo no, del mismo modo que el infinitesimal y el indivisible que les están asociados. De este modo, el término «non quanti» que Galileo emplea al referirse a los indivisibles se puede interpretar tanto como «inextenso» como por «no medible».

11 Véase Murdoch, J.E. (1974), «Naissance et développement de l'atomisme au bas Moyen âge latin», en *La science de la nature: théories et practiques*, Cahiers d'études médievales, 2, París, pp. 11-32.

12 La sucesión, el contacto y la continuidad se definen en el Cap. 3 del Libro V de la *Física.*

por lo que los puntos sólo podrán estar en contacto todo con todo, de modo que no formarán una magnitud continua divisible en partes distintas. Tampoco podrán hallarse en sucesión de tal modo que la línea esté compuesta de puntos, pues entre cualesquiera dos puntos siempre se puede trazar una línea, en la cual a su vez se puede señalar otro punto[13].

Esta construcción de Aristóteles, aparentemente sólida, dejaba sin embargo unos cuantos resquicios. Así, por ejemplo, cuando el concepto de continuidad se aplica a entidades matemáticas, no habría diferencia entre dos figuras en contacto y las mismas figuras formando un continuo, pues siendo sus extremos indivisibles, serían uno. Pero, además, este extremo común sólo podría tener una existencia potencial: de lo contrario un continuo geométrico se hallaría actualmente dividido por todas partes[14]. Precisamente lo que suponía Galileo.

Galileo no es nada explícito respecto de la forma en que podrían disponerse sus indivisibles dentro del continuo. Concuerda con la concepción clásica de que ningún número finito de indivisibles podrían componer una magnitud divisible y extensa; se precisa uno infinito[15]. De la estructura de este continuo sólo da idea en la solución que propone al conocido problema de los dos círculos planteado en la cuestión 24 de las *Cuestiones mecánicas*, obra entonces equivocadamente atribuida a Aristóteles. Presenta esta solución en el contexto de la explicación de los fenómenos de rarefacción y condensación. El problema consiste en lo siguiente. Supongamos (Fig. 2) un círculo AB que gira en torno a su centro sobre una base horizontal. Al cabo de una revolución completa del círculo, el punto B volverá a tocar a la base en F, siendo BF la longitud de la circunferencia. Imaginemos ahora otro círculo menor AC concéntrico con el anterior, y unido al mismo. Al cabo de una revolución, el punto C vuelve a encontrar a la base a una distancia igual a su circunferencia. Moviéndose solidariamente con el círculo AB, al término de esta revolución C se encontrará en E. Sin embargo CE, igual a BF, tiene una longitud superior a la de la circunferencia de AC[16].

---

[13] *Física*, Libro VI, Cap. 1.

[14] Estas y otras cuestiones se desarrollan en FURLEY (1982).

[15] EN, VIII, 77. Una objeción clásica a un continuo formado por un número finito de indivisibles, que recoge aquí Galileo, es que si, p. ej., un segmento de línea estuviese constituido por un número impar de indivisibles, al dividirlo en dos partes iguales el indivisible central quedaría dividido por la mitad.

[16] Según la interpretación actual, y desde un punto de vista físico, el punto C habría efectuado un rodamiento con deslizamiento.

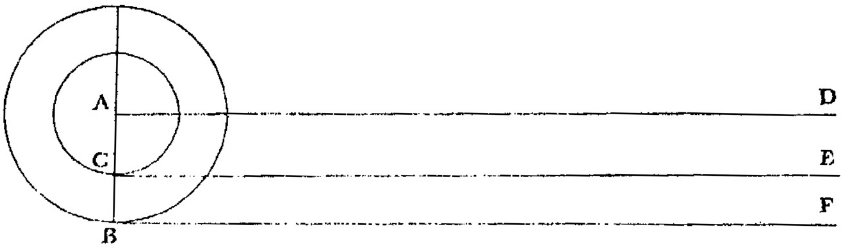

Fig. 2.

Para resolver la paradoja, Galileo comienza suponiendo dos polígonos regulares concéntricos, en su ejemplo hexágonos. Tal como se ve en la Fig. 3, los lados del polígono mayor se superpondrán sucesivamente sobre AS, mientras que los lados, más pequeños, del polígono menor, se «imprimirán» sucesivamente sobre HT dejando entre ellos espacios IO, PY, etc.; asimismo el centro G tocará a la línea GV en una sucesión de puntos a intervalos GC, CR, etc. Esto se puede extender a polígonos con cualquier número de lados. Así, si los lados son mil, al cabo de una revolución el polígono menor habrá recorrido una línea aproximadamente igual a la recorrida por el mayor, pero discontinua y formada por mil pequeños segmentos iguales a sus lados, con la interposición de otros tantos «espacios vacíos».

Si, en lugar de considerar polígonos, tomamos los dos círculos concéntricos, la situación es análoga, pues los círculos son polígonos de infinitos lados (pero recuérdese que no se llega a ellos aumentando al infinito el número de lados de los polígonos):

> «[...] en los círculos (que son polígonos de infinitos lados) la línea atravesada por los infinitos lados del círculo grande, dispuestos continuamente, es similar en longitud a la línea atravesada por los infinitos lados del menor, pero éstos con la interposición de otros tantos vacíos entre ellos; y como los lados no son cuantificables, sino infinitos, así los vacíos interpuestos no son cuantificables, sino infinitos: es decir, aquéllos, infinitos puntos, todos llenos; y éstos, infinitos puntos, parte llenos y parte vacíos»[17].

[17] «[...] nei i cerchi (che son poligoni di lati infiniti) la linea passata da gl'infiniti lati di cerchio grande, continuamente disposti, esser pareggiata in lunghezza dalla linea passata da gl'infiniti lati del minori, ma da questi con l'interposizion d'altrettanti vacui tra essi; e sì come i lati non son quanti, ma bene infiniti, così gl'interposti vacui non son quanti, ma infiniti: quelli, cioè, infiniti punti tutti pieni; e questi, infiniti punti parte pieni e parte vacui». EN, VIII, 71. El término «quante», que en otros lugares se ha traducido por «extenso», tiene aquí una acepción

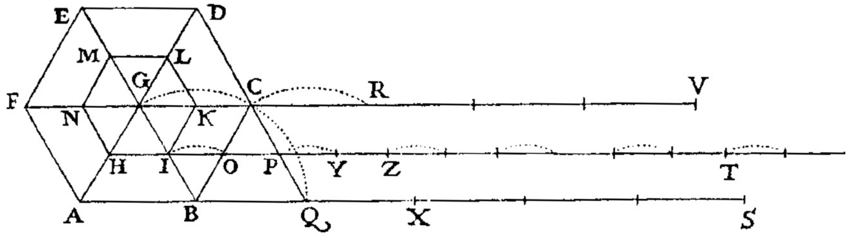

Fig. 3.

Nótese que en esta exposición tanto la línea BF, cuyos puntos no estarían separados por esos espacios vacíos interpuestos, como la CE, incluso como la AD (¡que, como observa Simplicio, es un solo punto!) son líneas de pleno derecho y con la misma naturaleza. Paradojas aparte, el ejemplo muestra que el continuo de Galileo está compuesto por un agregado infinito de puntos entre los que puede haber interpuestos infinitos espacios vacíos inextensos, o se pueden dar —caso de la condensación— infinitas superposiciones inextensas. En este último caso (fig. 4) es el polígono menor el que arrastra al mayor, de modo que en la línea HM se imprimen consecutivamente sus lados HI, IK, etc., mientras que en la línea descrita por los lados del polígono mayor se dará, para cada lado como el BC, una superposición bB que es la diferencia entre la longitud de los lados de los dos polígonos. En el caso de los círculos, estas superposiciones son infinitas, y por consiguiente inextensas:

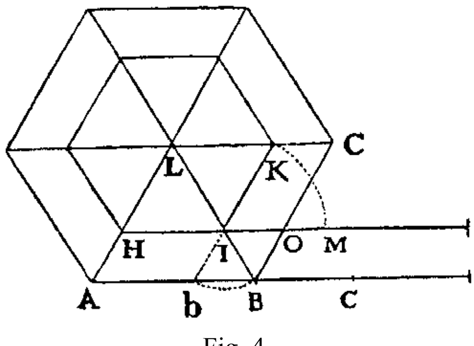

Fig. 4.

más próxima a «cuantificable». Pero, en definitiva, el sentido es el mismo. Tratándose de un infinito actual, tanto los lados como los vacíos tienen que ser necesariamente indivisibles.

 Asclepio, 2006, vol. LVIII, nº 1, enero-junio, 113-148, ISSN: 0210-4466

> «[...] en suma, los infinitos lados indivisibles del círculo mayor, con sus infinitos retrocesos indivisibles, efectuados en las infinitas demoras instantáneas de los infinitos términos de los infinitos lados del círculo menor, y con sus infinitos progresos, iguales a los infinitos lados del círculo menor, componen y describen una línea igual a la descrita por el círculo menor, que contiene en sí infinitas superposiciones inextensas, que producen una contracción y condensación sin verdadera penetración de partes extensas, lo que no se puede concebir que suceda en la línea dividida en partes extensas, tal como el perímetro del cualquier polígono, el cual, desplegado en línea recta, no se puede reducir a una longitud menor si no es haciendo que los lados se superpongan y penetren el uno en el otro»[18].

En el caso de la rarefacción, la alusión a «infinitos puntos todos llenos» en correspondencia con infinitos puntos «parte llenos, parte vacíos», hace pensar que Galileo entiende al espacio como un conjunto de lugares inextensos que pueden estar ocupados o no por puntos o átomos. En tal espacio, la que podría considerarse línea o figura de referencia fundamental, esa figura que «llenaría» todos los lugares del espacio, de modo que no existiesen vacíos ni superposiciones entre sus puntos, no puede ser más que convencional, tal como la escoge en el ejemplo de los dos círculos[19]. Distinguir una línea de este tipo de otras contraídas o dilatadas, y éstas entre sí, supondría una aritmética de los infinitos. Pero, ¿cómo un infinito actual podría ser mayor que otro? Para Galileo son, simplemente, incomparables y, así, no se puede decir, de dos segmentos, uno de doble longitud que el otro, que el primero contega el doble de infinitos indivisibles. Para mostrarlo presenta el ejemplo de la correspondencia

---

18 «[...] in somma gl'infiniti lati indivisibili del maggior cerchio con gl'infiniti indivisibili ritiramenti loro, fatti nell'infinite instantanee dimore de gl'infiniti termini de gl'infiniti lati del minor cerchio, e con i loro infiniti progressi, eguali a gl'infiniti lati di esso minor cerchio, compongono e disegnano una linea eguale alla descritta dal minor cerchio, contenente in sè infinite soprapposizioni non quante, che fanno una costipazione e condensazione senza veruna penetrazione di parti quante, quele non si può intendere farsi nella linea divisa in parti quante, quale è il perimetro di qualsivoglia poligono, il quale, disteso in linea retta, non si può ridurre in minor lunghezza se non col far che i lati si soprapponghino e penetrino l'un l'altro». EN, VIII, 95-96.

19 En ningún momento Galileo clarifica el modo de disposición de los puntos para formar el continuo. Si este silencio ante una conocida objeción a las teorías indivisibilistas escondía o no un problema de fundamentos, es algo que parece que no se puede dilucidar. Está claro que sus puntos no podían estar en contacto, pero tampoco separados por espacios extensos de tal modo que entre dos puntos sucesivos se pudiese tender una línea. Como se cuida de especificar, dichos espacios son inextensos y, además, no admiten razón entre sí, es decir, no son mayores, ni menores, ni iguales. Son tan indeterminados como el número de puntos que componen un segmento dado. En todo caso, el conjunto de puntos que componen el segmento es un conjunto denso, no numerable, pues corresponde a un infinito actual.

biunívoca entre el conjunto de números naturales y el de sus cuadrados: a todo cuadrado le corresponde su raíz, que es única, y viceversa. Pero las raíces son todos los números naturales, de modo que, pese a que la mayoría de números no son cuadrados y así aparentemente éstos son menos que los naturales, hay tantos cuadrados como números. Lo que presenta aquí Galileo es la propiedad de los conjuntos infinitos según la cual éstos son semejantes a una parte propia de sí mismos. De ello deduce Galileo que los atributos de mayor, menor o igual no tienen lugar entre los infinitos:

> «Y sin embargo cuando el Sr. Simplicio me propone líneas desiguales, y me pregunta cómo puede ser que en la mayor no haya más puntos que en la menor, yo le respondo que no hay ni más, ni menos, ni los mismos, sino en cada una infinitos: o si yo le respondiese que los puntos en una son tantos como los números cuadrados, en otra mayor tanto como todos los números, y en aquélla pequeña tantos como el número de los cubos, ¿no podría darle satisfacción al poner más en una que en la otra, y en cada una infinitos?»[20].

Siendo así, un infinito no guarda razón, ni con un finito, ni con otro infinito. Tampoco se dan razones entre los indivisibles; cualquier número finito de éstos no podrá formar una magnitud extensa. Sean cuantos fueren, los indivisibles agregados en número finito son simplemente «non quanti», inextensos. Tanto lo infinitamente grande como lo infinitamente pequeño escapa a la razón humana y, por consiguiente, a la racionalidad geométrica:

> «[...] el infinito es de por sí incomprensible para nosotros, como también los indivisibles; pensad lo que sucederá si se hallan juntos: aunque si queremos componer la línea de puntos indivisibles, necesitamos hacerlos infinitos; y así conviene considerar al mismo tiempo lo infinito y lo indivisible»[21].

---

20 «E però quando il Sig. Simplicio mi propone più linee diseguali, e mi domanda come possa essere che nelle maggiori non siano più punti che nelle minori, io gli rispondo che non ve ne sono nè più nè manco nè altrettanti, ma in ciascheduna infiniti: o veramente se io gli rispondessi, i punti nell'una esser quanti sono i numeri quadrati, in un'altra maggiore quanti tutti i numeri, in quella piccolina quanti sono i numeri cubi, non potrei io avergli dato sodisfazione col porne più in una che nell'altra, e pure in ciascheduna infiniti?». EN, VIII, 79.

21 «[...] l'infinito è per sè solo da noi incomprensibile, come anco gl'indivisibili; or pensate quel che saranno congiunti insieme: e pur se vogliamo compor la linea di punti indivisibili, bisogna fargli infiniti; e così conviene apprender nel medesimo tempo l'infinito e l'indivisibile». EN, VIII, 76-77.

En el ejemplo de los dos círculos, el punto A, centro de los círculos, describe una recta AD que es un solo punto[22]. Cuando Simplicio pregunta cómo es posible que una línea, que contiene infinitos puntos, sea igual a uno solo, Salviati le responde con otra paradoja, procurando

> «[...] atemperar una improbabilidad con otra igual o mayor, como a veces una maravilla se atenúa con un milagro»[23].

La paradoja es conocida con el nombre «de la escudilla» o «del bol». En la fig. 5, el rectángulo, el triángulo y el semicírculo engendran sólidos de revolución al girar sobre el eje CF. El «bol» resulta de la revolución de la figura AIFOBED, esto es, el cilindro ABDE «vaciado» de la semiesfera AFB. Si se corta la figura por planos perpendiculares al eje, como el GN, resulta que el círculo generado por la rotación del radio PL, obtenido al cortar el cono, tiene la misma área que la corona circular GION, obtenida al cortar el bol. Si se supone que el plano secante se eleva constantemente hacia la línea AB, en cada instante tanto los volúmenes cortados de los dos sólidos —el cono y el bol—, así como las correspondientes áreas interceptadas por el plano, son iguales. Cuando el plano secante llega a AB,

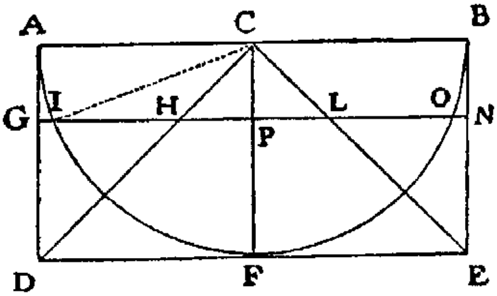

Fig. 5.

> «[...] finalmente, cortando y cortando tanto los dos sólidos (siempre iguales) como sus bases (superficies también siempre iguales) va a terminar una de estas

[22] Esta paradójica conclusión podría ponerse en consonancia con su no menos paradójica afirmación (EN, VIII, 83-84) de que el único número verdaderamente infinito es la unidad.

[23] «[...] temperare una improbabilità con un'altra simile o maggiore, come talvolta una maraviglia si attustice con un miracolo». EN, VIII, 73. La pregunta de Simplicio, en la p. 72.

> parejas en la circunferencia de un círculo, y la otra en un solo punto, pues tales son el borde superior de la escudilla y la cúspide del cono. Ahora bien, como en la disminución de los dos sólidos se va manteniendo siempre la igualdad entre sí hasta el final, parece conveniente decir que los más superiores y últimos términos de tales disminuciones permanecen iguales entre sí, y no el uno infinitamente mayor que el otro: parece pues que la circunferencia de un círculo inmenso pueda llamarse igual a un solo punto. Y esto que acontece en los sólidos, sucede igualmente en las superficies, sus bases, (...): ¿por qué éstas no se deben llamar iguales, si son las últimas reliquias y vestigios dejados por magnitudes iguales?»[24].

Todavía más, finaliza Salviati, de la igualdad de los puntos entre sí se deduce la igualdad de todas las circunferencias, cualquiera que sea su radio.

Lo que se mantiene igual a lo largo de todo el proceso son los volúmenes de los sólidos y las superficies de sus bases. A su término, la razón entre estos volúmenes o estas superficies sería indeterminada —en términos anacrónicos, cero partido por cero—. La paradoja aparece cuando se desvanece la frontera entre las dimensiones al considerar a las figuras geométricas compuestas de indivisibles y, en última instancia, de puntos. La razón debe existir en los límites porque, según la concepción de Galileo, dichos límites son partes de las figuras que encierran, y por tanto homogéneos con ellas[25]. La consecuencia es clara. Si, como se ha visto, en el tránsito de lo finito a lo infinito se pierde toda razón, y con ella toda posibilidad de comparar los infinitos, otro tanto sucede cuando se pasa de lo finito a la esfera de los indivisibles[26].

---

[24] «[...] finalmente, alzando e alzando tanto li due solidi (sempre eguali) quanto le lor basi (superficie pur sempre eguali), vanno a terminare l'una coppia di loro in una circonferenza di un cerchio, e l'altra in un sol punto, chè tali sono l'orlo supremo della scodella e la cuspide del como. Or mentre che nella diminuzione de i due solidi si va, sino all'ultimo, mantenendo sempre tra essi la egualità, ben par conveniente il dire che gli altissimi ed ultimi termini di tali menomamenti restino tra di loro eguali, e non l'uno infinitamente maggior dell'altro: par dunque che la circonferenza di un cerchio immenso possa chiamarsi eguale a un sol punto. E questo che accade ne i solidi, accade parimente nelle superficie, basi loro, (...); li quali perchè non si devon chiamare eguali, se sono le ultime reliquie e vestigie lasciate da grandezze eguali?». EN, VIII, 75.

[25] Por ello, en realidad, el reposo y el movimiento son de la misma naturaleza. Tal como afirmó en *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, Florencia, 163 (EN, VII, p.44), el reposo es un estado de «infinita lentitud». Naturalmente, el infinito implicado aquí es un infinito actual, de modo que este estado de reposo vendría representado por el punto extremo de una línea que representase un movimiento que partiese del mismo. Como se ve allí mismo en su demostración del que se convertirá en el Teorema I para movimientos acelerados de los *Discorsi*. Con referencia a la Fig. 8, el punto A es el momento mínimo de velocidad, que corresponde al estado de reposo (EN, VII, 255).

[26] A diferencia de lo que sucede con los infinitesimales. En este caso la razón entre los infinitesimales, respectivamente, de volumen y de superficie a los que se llegaría seguiría

Demostrada la imposibilidad de un cálculo de infinitos y de un cálculo de indivisibles, el único resultado positivo que obtiene Galileo es la propiedad de los conjuntos infinitos de poner sus elementos en correspondencia biunívoca con una parte propia de ellos. Tal propiedad le permite salvar los ejemplos clásicos de proyección que tradicionalmente se oponían a las teorías indivisibilistas, tales como las proyecciones entre los puntos del lado de un cuadrado y de su diagonal, o las trazadas desde el centro de dos circunferencias concéntricas. Pues Galileo podía responder que los infinitos puntos del lado y de la diagonal, o de cada una de las dos circunferencias, no son ni más, ni menos, ni los mismos: y, aún así, se puede establecer una correspondencia entre ellos.

3. Galileo y el método de Cavalieri

Bonaventura Cavalieri, contemporáneo y discípulo de Galileo, elaboró un método de determinación de cuadraturas y cubaturas basado en la comparación, bajo determinadas restricciones, de las colecciones de indivisibles de dos figuras de la misma dimensión. En realidad, Cavalieri nunca defendió públicamente que dichas figuras estuviesen compuestas por sus correspondientes colecciones de indivisibles. Sólo sí que la razón entre dichas colecciones era la misma que la razón entre las figuras. Cavalieri caracterizaba «todas las líneas» de una figura plana del siguiente modo. Supongamos una figura dada limitada entre dos tangentes opuestas y paralelas. Supongamos que un plano perpendicular al de la figura se desplaza paralelamente a dichas tangentes, recorriendo toda la longitud de la figura entre los planos perpendiculares a la misma que contienen a una y a la otra tangente. La «colección» de las líneas intersecadas por dicho plano —llamado «regula»— en su movimiento, son «todas las líneas» de la figura. Del mismo modo, las intersecciones de este plano móvil con un sólido conformarán la colección de «todos los planos» del sólido. El fundamento del llamado «método colectivo» de Cavalieri es el Teorema III del Libro II de su *Geometria* (1635) que afirma que la razón entre dos figuras es igual a la razón entre sus colecciones de líneas tomadas respecto de la misma regula[27]. A con-

---

siendo la de igualdad. Pero para ello ha de intervenir otro concepto de infinito. La idea de dotar de cierta «extensión» a los indivisibles la introducirá Evangelista Torricelli. Véase DE GANDT, F. (1984-85), «Naissance et metamorphose d'une théorie mathématique: la géometrie des indivisibles en Italie (Galilée, Cavalieri, Torricelli)», *Sciences et Techniques en Perspective*, 9, 179-229.

[27] El título completo del libro de Cavalieri es *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Bolonia, 1635. Más tarde publicó, sobre el mismo tema, las

tinuación, el Teorema IV establece que, en el caso de dos figuras planas (o sólidos) de la misma altura, y si las secciones trazadas por líneas (respectivamente, planos) paralelas a las bases y a iguales distancias de ellas están siempre en la misma razón, las figuras planas (o los sólidos) estarán en la misma razón. Éste es el que se conoce como «principio de Cavalieri».

Se sabe que, a pesar de los intentos de Cavalieri, Galileo nunca aceptó su método, aunque no se conserva documentación histórica explícita que determine cuál era el punto concreto de desavenencia. En una carta a Cavalieri opuso la paradoja de la escudilla al Teorema III del Libro II de la *Geometría*. La carta de Galileo se ha perdido, pero la referencia de Cavalieri es suficientemente expresiva:

> «Dice que si todas las líneas de dos superficies iguales son iguales, disminuyéndolas igualmente, los últimos vestigios de éstas deberán ser iguales: lo que no sucede en el ejemplo de la escudilla y del cono, quedando en aquélla una circunferencia de círculo, y en éste un punto, infinitamente menor que aquélla»[28].

Sin embargo, a la luz de lo expuesto anteriormente, parece claro que el desacuerdo debía hallarse, no ya en su principio, sino en los mismos fundamentos del procedimiento de Cavalieri. En el Postulado 1 del Libro II, Cavalieri establecía que todas las líneas de figuras planas congruentes son congruentes. Más tarde, en sus *Exercitationes*, explicará este punto afirmando que, si se lleva a la coincidencia a dos figuras congruentes, cada una de las líneas de la colección de líneas de la primera coincidirá exactamente con cada una de las líneas de la colección de la segunda[29]. Sería este principio de congruencia el que no podía aceptar Galileo. Como se ha visto, el número de puntos de dos segmentos de recta iguales no tiene por qué ser el mismo: ambas colecciones de puntos son incomparables[30]. Lo que, por decirlo así, res-

---

Exercitationes geometricae sex, Bolonia, 1647. Su obra, a la que estas breves noticias no hacen justicia, se estudia en ANDERSEN, K. (1985), «Cavalieri's Method of Indivisibles», *Archive for the History of Exact Sciences*, 31, 291-367, y en GIUSTI, E. (1980), *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*, Bolonia, Cremonese.

28 «Ella dice che se tutte le linee di due superficie eguali sono eguali, diminuendole egualmente, l'ultime esinanizioni di esse dovriano esser eguali: il che poi non appare nell'esempio della scodella e del cono, restando in quella una circonferenza di cerchio, et in questo un punto, infinitamente minore di quella». La carta de Cavalieri está fechada el 2 de Octubre de 1634. En EN, XVI, pp. 136-37.

29 ANDERSEN, (1985), 316.

30 Esta opinión concuerda con la expuesta por GIUSTI, (1980), 40-44. Giusti afirma que los indivisibles de dos figuras, de acuerdo con lo que expone Galileo en los *Discorsi*, no pue-

tringe drásticamente la aplicación del método de Cavalieri, pues no permite comparar las colecciones de líneas trazadas desde los puntos de bases *iguales*; sólo sí desde la *misma* base. O, dicho con más precisión, desde la misma colección de indivisibles, pues no cabe establecer la igualdad entre dos conjuntos infinitos.

4. El concepto de velocidad

Hace ya algunos años se puso de relieve que algunos de los problemas de interpretación y de los errores o inconsistencias supuestamente cometidos por Galileo se debían a una interpretación anacrónica de su concepto de velocidad. Para Galileo —así como para sus predecesores y contemporáneos— la velocidad no tenía el sentido actual de un espacio dividido por un tiempo. De acuerdo con una tradición que se remonta a Aristóteles y pasa por la interpretación geométrica de los mertonianos medievales, la velocidad era una magnitud «intensiva» —es decir, sujeta a aumento y disminución— característica del movimiento, entendido éste de una manera global. Dos movimientos se comparaban sobre la base de iguales duraciones (es más rápido el que recorre más espacio en el mismo tiempo) o de iguales espacios (es más rápido el que recorre el mismo espacio en menos tiempo), y ello sin que entrase particularmente en consideración su uniformidad o disformidad. La representación de tal magnitud era la de una superficie. La base era una línea que representaba, alternativamente, el intervalo de espacio, o de tiempo, considerado, y perpendicularmente a ella se trazaba desde cada punto una línea representando la

den compararse entre sí. Discrepo, sin embargo, en que esto sea consecuencia de que el punto de vista de Galileo es filosófico —físico, digamos—, mientras que el de Cavalieri es matemático. Por lo expuesto anteriormente, se ve que la propiedad de que los elementos de dos conjuntos infinitos se puedan poner en correspondencia biunívoca es la clave *matemática* para eludir los argumentos clásicos contra el indivisibilismo. Otra razón, sin excluir la vertiente filosófica que señala Giusti, es que para Galileo los indivisibles no sólo son los componentes de los cuerpos: también componen las figuras geométricas. Y en geometría sólo hay un indivisible, digamos, «absoluto»: el punto. La línea o el plano son sólo indivisibles relativos a dimensiones superiores, pero en su propia dimensión pueden ser divididos. Esto es lo que distingue un «método» de indivisibles como el de Cavalieri de una «teoría» de indivisibles como la de Galileo. Respecto de la afirmación de Giusti, en la p. 44, de que Galileo, pese a oponerse al uso de indivisibles en geometría ¿dónde dice que se opone?) emplea más tarde, sin embargo, métodos «similares» y «posiblemente más rudimentarios [cruder]», me parece injustificada, como espero mostrar en las páginas que siguen.

intensidad o grado de velocidad en el lugar, o instante, correspondiente. Dicho grado era constante en el caso del movimiento uniforme, o variable en el del acelerado. La figura resultante se entendía, por lo general, de una manera holista, como un todo[31]. Por otra parte, la interpretación de esta superficie como un agregado de intensidades o grados es una idea propia de las concepciones indivisibilistas, entre ellas la de Galileo.

Es importante notar que el grado de velocidad no tiene nada que ver conceptualmente —salvo como precedente histórico— con nuestra actual velocidad instantánea. Mientras que esta última es una velocidad, puesto que se refiere a un determinado espacio recorrido en un determinado tiempo (aunque sean infinitesimales, estos intervalos de espacio y tiempo tienen extensión y son por consiguiente divisibles), el grado de velocidad es, geométricamente hablando, un indivisible de velocidad, una línea cuando la velocidad se representa por una superficie, y por tanto no comparte su naturaleza: en un instante, entendido como un indivisible de tiempo (un punto, cuando el tiempo se representa por una línea) no se recorre ningún espacio. (Y, por otra parte, análogamente, tampoco un instante es un tiempo.)

En el estudio del movimiento local de los *Discorsi*, el término «velocidad» aparece por primera vez en los Axiomas III y IV:

> «Axioma III. El espacio recorrido a mayor velocidad en un tiempo dado es mayor que el espacio recorrido en ese tiempo a menor velocidad.
>
> «Axioma IV. La velocidad con que se recorre en un tiempo dado un espacio mayor, es mayor que la velocidad con que se recorre en el mismo tiempo un espacio menor»[32].

Galileo escribe aquí «velocidad» y no «grado de velocidad». Luego deberíamos entender que se está refiriendo al concepto de velocidad anteriormente explicitado, y que, para distinguirla del concepto actual, se ha denominado con frecuencia «velocidad total»[33]. Dado que la velocidad está caracterizada por las

---

[31] Véase al respecto SOUFFRIN, P. (1992), «Sur l'histoire du concept de vitesse d'Aristote à Galilée», *Rev. Hist. Sci.*, XLV/2-3, 231-267, y P. DAMEROW, P.; FREUDENTHAL, G.; MCLAUGHLIN; P.; RENN, J. (1992), *Exploring the Limits of Preclassical Mechanics*, Nueva York, Springer-Verlag, pp. 13-19.

[32] «Axioma III. Spatium a maiori velocitate confectum tempore eodem, maius est spatio confecto a minori velocitate.

«Axioma IV. Velocitas qua tempore eodem conficitur maius spatium, maior est velocitate qua conficitur spatium minus». (EN, VIII, 191-192).

[33] La interpretación que hacen algunos autores de esta «velocidad total» como nuestro concepto actual de velocidad media es, evidentemente, impropia.

intensidades o grados y la extensión —la intensidad, claro está, no varía al ser el movimiento uniforme— hay que caracterizar ambas en los dos movimientos que se están comparando. En ambos axiomas se especifica la misma extensión —el mismo intervalo de tiempo— de modo que las relaciones establecidas entre espacios y velocidades se cumplen automáticamente también para las intensidades o grados de las velocidades en los dos movimientos. Pero Galileo no se estaba refiriendo a estas últimas: como se ha dicho, el grado de velocidad no es una velocidad.

Con la definición del movimiento uniforme, los cuatro axiomas y los dos primeros teoremas, lo que hace Galileo es geometrizar las nuevas magnitudes introducidas, tiempo y velocidad, sometiéndolas a la teoría de las proporciones del Libro V de Euclides. Así, el Teorema I establece la proporción entre espacios y tiempos de dos movimientos realizados con la misma velocidad:

> «Teorema I, Proposición I. Si un móvil trasladado uniformemente y con la misma velocidad recorre dos espacios, los tiempos invertidos tendrán entre sí la misma proporción de los espacios recorridos»[34].

El Teorema II establece la proporción entre espacio y velocidad entre dos movimientos considerados en el mismo tiempo y, finalmente, en el Teorema III, dada la igualdad de distancia recorrida, demuestra la proporción entre tiempos y velocidades.

Teniendo presente este concepto de velocidad y de las relaciones establecidas en el caso de movimientos uniformes, pasemos a ver los problemas que le planteó a Galileo su extensión a movimientos uniformemente acelerados[35].

Un ejemplo bastante conocido pondrá de manifiesto esto, a la par que las dificultades a las que se tuvo que enfrentar Galileo para desarrollar su matematización del movimiento. En una de sus demostraciones, probablemente redactada en los años preparatorios a los *Discorsi*, y que no apareció en ellos, estudiaba el movimiento de descenso de un grave por planos de distinta inclinación. Buscaba demostrar que en cualquiera de ellos, a partir del reposo inicial, el grave pasa por todos los grados de velocidad, más rápidamente en el plano más inclinado, menos en el de menor inclinación, sin saltarse ninguno

[34] «Theorema I, Propositio I. Si mobile aequabiliter latum eademque cum velocitate duo pertranseat spatia, tempora lationum erunt inter se ut spatia peracta». (EN, VIII, 192).

[35] A partir de este momento, y para simplificar la exposición, siempre que se hable de movimientos acelerados se entenderán movimientos uniformemente acelerados, a menos que se indique expresamente lo contrario.

de estos grados, lo que se conoce como principio de continuidad[36]. En la fig. 6, sea *ab* el horizonte, y supongamos los ángulos *fCg* y *dCe*, de los cuales el mayor corresponde al plano más inclinado. Sea *hl* una línea que se desplaza uniformemente paralelamente a *ab* hacia abajo, cuyo movimiento representa el transcurso del tiempo a partir de un momento inicial de coincidencia con *ab*. En la posición de la figura, intercepta sobre el ángulo *dCe*, correspondiente al plano de menor inclinación, la línea *oi*, que representa el grado de velocidad del móvil en ese momento. Si elevamos las perpendiculares *oq* e *ir*, vemos que el grave que desciende por el plano más inclinado habrá pasado por el mismo grado de velocidad, *zt*, en un instante anterior[37]. Esto se cumple para todos los grados de velocidad menores que cualquiera dado, es decir, que a toda paralela a *oi* en el triángulo *oCi* corresponde una a *zt* en el triángulo *zCt*.

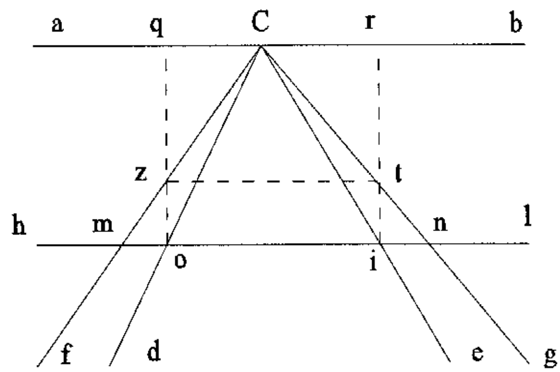

Fig. 6. Para mayor claridad, se han añadido las líneas *qo, ri, zt.*

De acuerdo con nuestras concepciones actuales, el área de estos triángulos representaría los espacios recorridos. Pero, como se ha visto, en la época se sostenía una concepción bien distinta: las áreas representarían las velocidades de ambos movimientos. La cuestión aquí es que la colección de grados de

[36] La demostración, en EN, II, 264-265. Sobre la datación, véase WISAN, W.L. (1974), «The New Science of Motion: A Study of Galileo's De motu locali», *Arch. Hist. Exact Sci*, 13, 103-306, pp. 276-278.

[37] Las líneas de trazos oq, ri y zt no constan en la figura original. Se han introducido, a imitación de GALLUZZI, P. (1979), *Momento. Studi galileani*, Roma, Edizioni dell'Ateneo & Bizarri, p. 338, para mayor claridad.

velocidad adquiridos por el grave en los dos planos inclinados *es la misma* y, sin embargo, está representada por dos triángulos desiguales. Este hecho, al que he denominado «paradoja de Galileo», no constituye un problema de fundamentos, sino una característica de la teoría. Característica que no deja de ser bastante embarazosa, y que hasta cierto punto contribuye a explicar por qué los indivisibles dieron lugar a los infinitesimales. Desde el punto de vista de Cavalieri, se podría decir que la densidad de puntos en el segmento *rt* es superior a la del segmento *ri*. De hecho, si dilatásemos el primero hasta la longitud del segundo, obtendríamos el mismo tránsito recto y los dos triángulos serían iguales. Y el principio de congruencia asegura que dentro de su método se esté trabajando siempre con líneas de la misma densidad. Desde el punto de vista de las ideas de Galileo, la comparación entre el número de puntos de *rt* y de *ri* a través de la colección de grados de velocidad constituye asimismo una operación prohibida, al ser una comparación entre conjuntos infinitos. No se puede decir que *rt* tenga menos, igual o más puntos que *ri*: sólo sí que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de ambos segmentos.

En consecuencia, Galileo no podía comparar dos movimientos acelerados empleando la comparación entre las áreas que representarían las velocidades. De hecho, la velocidad tendría que definirse como la colección de grados de velocidad adoptados sucesivamente por el móvil en un tiempo o espacio dados, y no como su agregado formando una superficie. De modo que propongo reconsiderar la interpretación actual del concepto «holista» de velocidad en Galileo, en el sentido de que hay que entender que *la velocidad de un movimiento es la colección de sus grados de velocidad* y sólo bajo la restricción que se verá un poco más adelante —al comentar el Teorema I para movimientos acelerados— podrá representarse por el área engendrada por dicha colección. Sin embargo, las velocidades, entendidas como colecciones infinitas de grados de velocidad, pueden caracterizarse asimismo especificando los grados inicial y final: dos tramos de dos movimientos acelerados que parten del mismo grado de velocidad, y llegan al mismo grado de velocidad, se efectúan con la misma velocidad. Pues, por el principio de continuidad, la colección comprenderá, en ambos casos, todos los grados de velocidad comprendidos entre el inicial y el final, sin saltarse ninguno. Si, en concreto, se considera un movimiento que parte del reposo, entonces su velocidad en un momento dado vendrá caracterizada por el grado de velocidad alcanzada en ese momento.

A partir de estas posibilidades, Galileo exploró dos vías. Una fue introducir o postular una proporción que vinculase las velocidades así caracterizadas por su grado de velocidad final con otras características del movimiento, espacio o tiempo. La otra fue reducir los movimientos acelerados a movimientos uniformes equivalentes, de modo que las relaciones establecidas entre estos últimos se cumpliesen entre los primeros. Comenzaremos por comentar esta última vía.

5. El Teorema I, o el movimiento uniforme equivalente

La equivalencia entre un movimiento acelerado y otro uniforme, análoga a la «regla de Merton» medieval, se presenta en el Teorema I para movimientos acelerados. En él se afirma que el tiempo en el cual es recorrido un espacio dado por un móvil que parte del reposo con movimiento uniformemente acelerado es igual al tiempo con que aquel mismo espacio habría sido recorrido por el mismo móvil con un movimiento uniforme tal que su grado de velocidad fuese la mitad del grado de velocidad máximo alcanzado en movimiento acelerado. La demostración, bien conocida, es como sigue. En la fig. 7, AB es el tiempo durante el cual el móvil, partiendo del reposo en C, recorre el espacio CD con aceleración uniforme. EB representa el grado máximo de velocidad alcanzado con este movimiento. Todas las paralelas a EB trazadas desde AB a partir de A representan los infinitos y crecientes grados de velocidad adquiridos sucesivamente por el móvil. Se traza ahora GF, paralela a AB, y GA, paralela a BF, de modo que GF seccione por la mitad el lado AE por el punto I, formándose un paralelogramo AGFB igual en área al triángulo AEB. La demostración prosigue así:

> «[...] pero si las paralelas del triángulo AEB se extienden hasta IG, tenenemos que el agregado de todas las paralelas contenidas en el cuadrilátero es igual al agregado de las comprendidas en el triángulo AEB; pues las que están en el triángulo IEF son iguales a las contenidas en el triángulo GIA; y las que hay en el trapecio AIFB son comunes. Puesto que a todos y cada uno de los instantes de tiempo de AB corresponden todos y cada uno de los puntos de la línea AB, representando las paralelas comprendidas en el triángulo AEB los grados de velocidad crecientes de la velocidad aumentada, y las paralelas comprendidas en el paralelogramo todos los grados de velocidad no aumentados, sino iguales; se ve, que se consumen tantos momentos de velocidad en el movimiento acelerado según las paralelas crecientes del triángulo AEB como en el movimiento uniforme según las paralelas del paralelogramo GB. Pues lo que falta de momentos en la primera mitad del movimiento acelerado (siendo representado lo que falta por las paralelas del triángulo AGI), se recupera con los momentos representados por las paralelas del triángulo IEF. Por consiguiente es patente que serán iguales los espacios recorridos por dos móviles en un mismo tiempo, de los cuales uno se mueve con movimiento acelerado desde

el reposo, y el otro con movimiento uniforme con un momento mitad del momento máximo de la velocidad del movimiento acelerado: que es lo que se quería demostrar»[38].

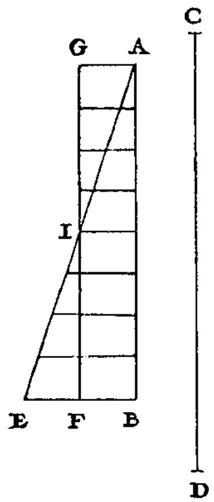

Fig. 7.

Por el momento, basta con considerar como equivalentes los «momentos» y los grados de la velocidad, dejando para más adelante la matización de la diferencia —nada trivial, como se verá— entre ambos.

---

38 «[...] quodsi parallelae trianguli AEB usque ad IG extendatur, habebimus aggregatum parallelarum omnium in quadrilatero contentarum aequalem aggregatui comprehensarum in triangulo AEB; quae enim sunt in triangulo IEF, pares sunt cum contentis in triangulo GIA; eae vero quae habentur in trapezio AIFB, communes sunt. Cunque singulis et omnibus instantibus temporis AB respondeant singula et omnia puncta lineae AB, ex quibus actae parallelae in triangulo AEB comprehensae crescentes gradus velocitatis adauctae repraesentant, parallelae vero intra parallelogrammum contentae totidem gradus velocitatis non adauctae, sed aequalibis, itidem repraesentent; apparet, totidem velocitatis momenta absumpta esse in motu accelerato iuxta crescentes parallelas trianguli AEB, ac in motu aequabili iuxta parallelas parallelogrammi GB: quod enim momentorum deficit in prima motus accelerati medietate (deficiunt enim momenta per parallelas trianguli AGI repraesentata), reficitur a momentis per parallelas trianguli IEF repraesentatis. Patet igitur, aequalia futura esse spatia tempore eodem a duobus mobilibus peracta, quorum unum motu ex quiete uniformiter accelerato moveatur, alterum vero motu aequabili iuxta momentum subduplum momenti maximi velocitatis accelerati motus: quod erat intentum». EN, VIII, 208-209.

La demostración presenta un punto problemático. De acuerdo con lo visto, Galileo no puede comparar dos colecciones de grados de velocidad, una correspondiente al movimiento acelerado y otra al uniforme. Debe partir de *la misma* colección de grados —la del movimiento acelerado— y construir sobre ella la colección de grados de velocidad iguales del paralelogramo AGFB. Sin embargo, para mostrar que lo que falta de momentos en la primera mitad del movimiento acelerado (los que componen el triángulo AGI) se compensa con el exceso de la segunda mitad (los que componen el triángulo IEF), da por supuesto que ambas colecciones tienen el mismo número de grados, estableciendo así una relación de igualdad entre dos conjuntos infinitos. Esta inconsistencia, así como otra del mismo tipo que aparece en el Escolio al Problema IX,[39] fue puesta de manifiesto por P. Galluzzi, quien piensa que el error fue motivado porque era «instintivamente plausible» suponer que dos superficies iguales estuviesen compuestas por agregados iguales[40]. También podría decirse que lo que condujo a Galileo a este error es la suposición de que la línea AB tuviese una distribución homogénea de puntos (a fin de cuentas representa al tiempo) y de ahí —y aquí estaría el paso ilícito— concluyese que su número de puntos es doble del de aquéllos que constituirían su mitad. Sea como fuere, el problema pasó inadvertido a Galileo, quien podría haberlo eludido fácilmente. Si construimos la figura tal como aparece en el Escolio al Problema IX (Fig. 8) entonces, partiendo de la colección de paralelas del triángulo ABC bastaría, trazando BD, con extender hasta ella todas estas paralelas. De este modo, el infinito número de paralelas de ABC es el mismo, por construcción, que el de ACBD, y así el movimiento representado por las paralelas ACBD es el doble del representado por las paralelas de ABC; como también es doble su superficie. De hecho, éste es el modo de proceder de Galileo en la demostración que aparece en el *Dialogo*[41].

De todas formas, que la cuestión no es trivial se ve en la interpretación de J. Renn, según la cual la demostración del Teorema I se basaría en la comparación entre dos colecciones de grados de velocidad, lo que supondría una generalización de la «ley de Merton»[42]. De acuerdo con esta interpretación, si la línea AE (Fig. 7), en lugar de representar un crecimiento lineal de los grados de velocidad, fuese curva en lugar de recta, representando un crecimiento

---

[39] EN, VIII, 243-244.

[40] P. Galluzzi (1979), 352-354.

[41] EN, VII, 255-256. Y también en un manuscrito que recoge su deducción de la ley de la doble distancia (EN, VIII, 383-384), precedente del Teorema que estamos comentando.

[42] DAMEROW *et al* (1992), 239-240.

monótono, partiendo igualmente de A y llegando a E, entonces el Teorema sería aplicable. Aun cuando las nuevas áreas correspondientes a las AGI e IEF sean distintas, todavía se podría establecer una correspondencia biunívoca entre las dos colecciones de grados de velocidad en cada una de ellas. De este modo, cualesquiera movimientos monótonamente acelerados que, partiendo del reposo, alcanzasen el mismo grado de velocidad final, atravesarían la misma distancia en el mismo tiempo, al ser todos equivalentes al mismo movimiento uniforme. Por lo dicho, está claro que tal generalización está en contra de la teoría expuesta en la Primera Jornada; Galileo no puede comparar los grados de velocidad de dos movimientos, tiene que ceñirse a *la misma* colección de grados.

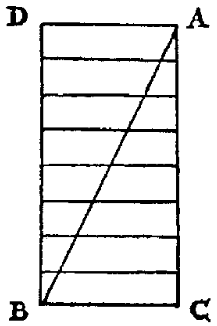

Fig. 8.

Con este teorema, todo movimiento uniformemente acelerado se puede sustituir por un movimiento uniforme equivalente. Y dos movimientos acelerados pueden compararse a través de la comparación entre los correspondientes movimientos uniformes. Nótese, sin embargo, que si tal comparación se pretende efectuar a través de la comparación entre las velocidades de ambos movimientos, subsiste el problema señalado en el apartado anterior. Consideremos el caso de dos movimientos uniformemente acelerados, ambos partiendo del reposo, a lo largo de dos planos inclinados de la misma altura, o por un plano inclinado y su vertical. Si se representan los grados de velocidad en función del tiempo, se obtiene la fig. 9 (a). Como se ve en ella, las velocidades se representan por triángulos de la misma base (el móvil alcanza el mismo grado final de velocidad) pero de desigual altura, pues los tiempos de los movimientos son distintos[43]. Sustitu-

[43] Como se hace notar en DAMEROW *et al* (1992), 237-238. Mis conclusiones, sin embargo, difieren de las suyas.

yámoslos ahora por los movimientos uniformes equivalentes, tal como se representa en la figura 9 (b). Se ve que el mismo agregado de grados de velocidad —la misma velocidad— que, en la figura 9 (a), originaba dos triángulos de área distinta, origina ahora dos cuadriláteros de área igualmente distinta, aunque ambos estén engendrados por el mismo agregado de líneas. Dos cuadriláteros de diferente área, como en realidad debe ser, pues dos movimientos uniformes realizados en tiempos distintos con la misma intensidad de velocidad no pueden tener la misma velocidad total[44].

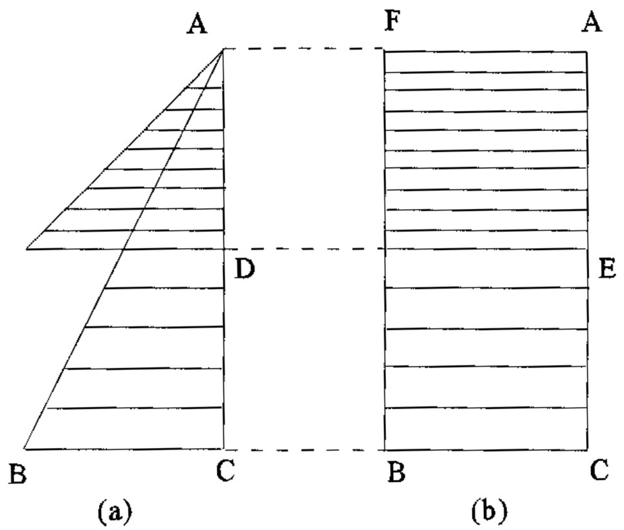

Fig. 9.

Así pues, sólo bajo las condiciones de esta demostración del Teorema I —el mismo intervalo de tiempo, y un solo movimiento acelerado compa-

[44] Ni en ellos se recorre el mismo espacio. Un punto interesante es por qué Galileo no relacionó estas áreas con los espacios recorridos, como parece sugerir de manera casi inmediata la regla de la doble distancia. La explicación comúnmente aceptada se basa en la repugnancia a asimilar, en el seno de la geometría, una longitud con una superficie. Mersenne, quien sí realizó tal identificación, pudo hallarse influido en este sentido por las ideas de Descartes, quien, desde el álgebra, no tuvo ningún inconveniente en representar cuadrados y cubos mediante líneas. Véase al respecto NARDI, A. (1988), «La quadratura della velocità. Galileo, Mersenne, la tradizione», *Nuncius*, 2, 27-64.

rado con otro uniforme contruido a partir del mismo— puede eludir Galileo las fuertes restricciones impuestas por su teoría de indivisibles. Sólo en este caso la razón entre dos colecciones de grados de velocidad es la misma que la razón entre las superficies que engendran estas colecciones. Esto es, sin embargo, suficiente para extraer una conclusión independiente del concepto de velocidad como colección de grados o intensidades: ahora los movimientos acelerados que parten del reposo —nótese esta restricción— se pueden caracterizar, no ya por un área, sino por su grado máximo de velocidad. Y así, cuando se trata de comparar dos movimientos acelerados mediante sus movimientos uniformes equivalentes, la comparación entre ellos no se efectúa a través de sus velocidades, sino a través de un grado de velocidad que, conforme al enunciado de este Teorema, corresponde a la mitad del grado máximo alcanzado en el correspondiente movimiento acelerado[45]. El significado se vuelca aquí sobre el del grado máximo, no el del grado medio de la «ley de Merton», lo que distingue con claridad ambas formulaciones.

Así pues, el Teorema I no sólo supone la transformación de un movimiento acelerado en un movimiento uniforme equivalente; también establece un puente entre el dominio de los indivisibles, el de las colecciones de grados de velocidad, y el dominio finito, ortodoxamente euclídeo, dentro del cual se desarrolla el estudio del movimiento uniforme. Nótese que en las representaciones geométricas que acompañan a las demostraciones en este estudio, las velocidades se figuran siempre mediante una línea, que representa su intensidad o grado.

Galileo debió sentirse muy satisfecho por haber encontrado esta salida, pero no del todo satisfecho. Reducir el estudio del movimiento acelerado al del uniforme suponía la renuncia al estudio de los movimientos acelerados por sí mismos. Y esto nos devuelve a la primera vía anteriormente mencionada.

---

[45] Esto es precisamente lo que se señala en DAMEROW *et al* (1992), 233, refiriéndose a la deducción de la ley de caída. Su renuncia a abordar los fundamentos indivisibilistas de Galileo les limita, sin embargo, a constatar esta circunstancia, así como la existencia de problemas a la hora de representar la velocidad como un área, sin llegar a esclarecer su origen. De este modo, califican de «paradojas» lo que aquí se muestran como limitaciones de la teoría. La observación relativa al grado máximo de velocidad se hace en el contexto de una discusión del Teorema II (donde se deduce la ley de caída libre), y afirman que con esto Galileo se libra de las paradojas que aparecen al representar la velocidad por un área. No obstante, según he intentado mostrar, tal representación es lícita en este contexto, al tratarse de un solo movimiento acelerado y su movimiento uniforme equivalente.

6. El Postulado y el Teorema III

La otra vía para la comparación de movimentos acelerados, como se dijo más arriba, consistía en introducir como postulado una relación que vinculase las velocidades, las colecciones de grados, con alguna otra magnitud a nivel finito. He aquí el enunciado del Postulado, que Galileo introdujo explícitamente como tal:

> «Acepto, que los grados de velocidad adquiridos por el mismo móvil sobre planos diversamente inclinados son iguales cuando las elevaciones de los mismos planos son iguales»[46].

Con referencia a la fig. 10, el postulado afirma que los grados de velocidad adquiridos por el mismo móvil que descienda por los planos inclinados CA y CD serán iguales, si se comparan en los puntos finales A y D, al ser la altura de ambos planos, CB, la misma; y lo mismo puede decirse, en el caso del descenso vertical, del grado de velocidad en el punto B. Partiendo en todos los casos del reposo, la igualdad de estos grados de velocidad implica la de las velocidades mismas.

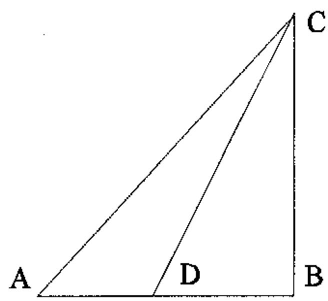

Fig. 10.

Este camino, al parecer preferido por Galileo, pues lo expone por boca de Salviati, presenta más dificultades. Al publicarse la primera edición de los

46 «Accipio, gradus velocitatis eiusdem mobilis super diversas planorum inclinationes acquistos tunc esse aequales, cum eorundem planorum elevationes aequales sint». EN, VIII, 205.

Discorsi no tenía demostración de esta proposición, de modo que intentó una dudosa justificación experimental, en cuya consideración no entraremos: en la segunda edición, en un anexo, redactado por la mano de su discípulo Viviani, se presentó una demostración basada en un principio dinámico cuya consideración dejaremos para un poco más adelante[47].

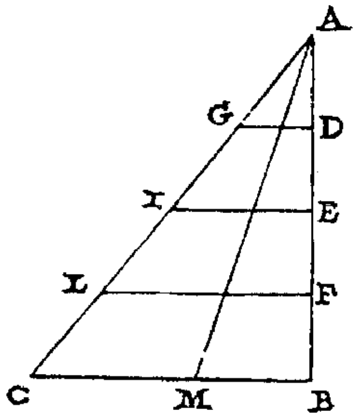

Fig. 11.

Este postulado le permite abordar la demostración de una serie de teoremas sobre el movimiento acelerado que se abre con el Teorema III, conocido como el teorema del plano inclinado. En él se afirma que si el mismo móvil, partiendo del reposo, se mueve por un plano inclinado y por la vertical, cayendo desde la misma altura, los tiempos de estos movimientos estarán entre sí como las longitudes recorridas por el plano y por la vertical. La demostración es como sigue. En la fig. 11, AB y AC representan estas longitudes. En cada par de puntos GD, IE, LF, etc., situados a la misma altura, según el postulado, el grado de velocidad será el mismo. Y prosigue:

> «Por lo cual, si no sólo éstas, sino que se supone que se trazan paralelas desde todos los puntos de la línea AB hasta la línea AC, los momentos o grados de velocidad en los extremos de cada paralela siempre son iguales entre sí. Por lo tanto, los espacios AC y AB son atravesados con los mismos grados de velocidad. Pero se ha demostrado que si dos espacios son atravesados por un móvil con los mismos grados de velocidad,

[47] EN, VIII, 214-19.

> entonces cualquiera que sea la razón de los espacios, los tiempos del movimiento tienen la misma; por lo que el tiempo del movimiento por AC es al tiempo por AB como la longitud del plano AB es a la longitud de la vertical AC»[48].

Los últimos pasos son problemáticos. Pues la demostración a la que alude Galileo —que si dos espacios son atravesados por un móvil con los mismos grados de velocidad, entonces los tiempos guardan la misma razón que los espacios— no aparece en ninguna parte para movimientos acelerados, sólo sí como el Teorema I para movimientos uniformes; cuya demostración no es extensible a los acelerados.

Respecto de esta cuestión, la opinión de los historiadores está dividida. Hay quienes creen que Galileo cometió un error, aplicando equivocadamente un Teorema que sólo había demostrado para movimientos uniformes[49]. Otros creen que al efectuar tal aplicación está empleando en realidad el Teorema I para movimientos acelerados, que permite su reducción a movimientos uniformes equivalentes[50]. Si bien a esta interpretación se opone el hecho de que Galileo presentase claramente esta vía como un camino alternativo[51]. Finalmente, otros han buscado entre sus manuscritos algún testimonio de una demostración que, por una u otra razón, no fue recogida en los *Discorsi*.

Dentro de esta tercera interpretación, P. Galluzzi encuentra tal testimonio en un borrador del mismo Teorema III[52]. En él Galileo divide la perpendicular y la inclinada en innumerables espacios iguales y correspondientes («quasi innumera quaedam spaciola»). En cada par de espacios, éstos están entre sí como la inclinada a la perpendicular; y se recorren con el mismo grado de velocidad («suntque in singulis binis sibi respondentibus iidem velocitatis gradus»). Esta división de la perpendicular y la inclinada en el mismo e indefinido número de pequeños espacios, que según Galluzzi anuncia los procedimientos infinitesimales, abría una vía para resolver la incomparabilidad

---

48 «Quod si non hae tantum parallelae, sed ex punctis omnibus lineae AB usque ad lineam AC protractae intelligantur, momenta seu gradus velocitatum in terminis singularum parallelarum semper erunt inter se paria. Conficiantur itaque spatia duo AC, AB iisdem gradibus velocitatis. Sed demostratum est, quod si duo spatia conficiantur a mobili quod iisdem velocitatis gradibus feratur, quam rationem habent ipsa spatia, eandem habent tempora lationum; ergo tempus lationis per AC ad tempus per AB est ut longitudo plani AC ad longitudinem perpendiculi AB: quod erat demostrandum». EN, VIII, 216-217.

49 WISAN (1974), 220.

50 DAMEROW *et al* (1992), 239.

51 WISAN (1974), 220.

52 GALLUZZI (1979), 359-360. El borrador, en EN, VIII, 388.

impuesta por la teoría de indivisibles. Todavía, como advierte el mismo Galluzzi, tiene en su contra el principio de continuidad. Esto estaría en consonancia con su interpretación del «momento de la velocidad» en términos infinitesimales, de modo que cada uno de estos momentos, operando en un instante, un punto de la línea que representa al tiempo, correspondería a una distancia recorrida[53]. Así, la equivalencia de un movimiento acelerado a otro uniforme establecida en el Teorema I se fundmentaría en una suspensión de la aceleración a nivel infinitesimal, gracias a la cual los grados en el movimiento acelerado se reducirían a grados de velocidad de movimiento uniforme[54]. La consecuencia, si interpreto correctamente las ideas de Galluzzi, es que la teoría de indivisibles presentada en la Primera Jornada se convertiría, en la Tercera, en una ambigua teoría infinitesimal que Galileo, consciente de su incompatibilidad con el principio de continuidad, habría procurado ocultar.

Por otra parte, según la interpretación de P. Souffrin,[55] en la demostración del Teorema III Galileo no se habría referido al Teorema I para movimientos uniformes, sino a una versión generalizada del mismo hallada entre sus manuscritos[56]. En esta versión se consideran dos longitudes divididas en una multiplicidad de partes que se corresponden una a una entre sí. Si estas longitudes se recorren con movimientos uniformes, de modo que en cada par de partes correspondientes las velocidades son iguales, entonces la razón de la suma de los espacios recorridos por cada una de las longitudes es como la razón de los tiempos invertidos en recorrerlas. Y éste sería el fundamento del borrador de la demostración del Teorema III comentado por Galluzzi. En tal demostración, Galileo habría realizado un paso al límite que convertiría estas porciones «casi innumerables» en una infinitud de movimientos uniformes infinitesimales[57].

El atractivo de estas interpretaciones es indudable, pues clarifican los pasos seguidos por Galileo en términos de unas concepciones proto-infinitesimales conmensurables con nuestros procedimientos actuales de resolución del pro-

---

53 *Ibid.*, p. 369. Pero esto supone de dotar de cierta extensión –infinitesimal– al instante de tiempo, además de a los grados de velocidad de cada uno de los dos movimientos acelerados. Con lo cual se resuelve la aparente paradoja de que la misma colección de grados origine figuras de superficie distinta: los grados de una colección son de «anchura» proporcionalmente mayor que los de la otra.

54 *Ibid.*, p. 355-356.

55 SOUFFRIN, P. (1986), «Du mouvement uniforme au mouvement uniformément accéléré. Une nouvelle lecture de la démonstration du théorème du plan incliné dans les *Discorsi* de Galilée», en *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, VI, Fasc. 1, 135-144.

56 EN, VIII, 372.

57 *Ibid.*, pp. 141-142.

blema. Sin embargo, se les puede objetar que Galileo nunca explicitase ese paso al dominio infinitesimal. Y, más significativo, que requieren atribuir a Galileo una concepción de infinito afín con la de ahora, correspondiente a ese término medio entre las cantidades finitas y las infinitas al que se refirió en la Primera Jornada. Sólo con este concepto de infinito la división en partes correspondientes de dos líneas conduce a elementos todavía extensos y por consiguiente susceptibles de razón entre sí[58]. Pero, a mi modo de ver, éste no es el concepto de infinito de Galileo, según el cual la división en infinitas partes de magnitudes extensas llevaría a elementos definitivamente indivisibles y, en el caso de líneas, sin posibilidad de razón entre sí[59].

Así, pues, cabe suponer que Galileo, en la comparación de dos movimientos acelerados, no empleó técnicas infinitesimales. Tampoco, como se ha visto, podía emplear técnicas indivisibilistas, salvo a través de la vía facilitada por el Teorema I para movimientos acelerados. Por otra parte, la introducción del Postulado resultaba insuficiente, pues únicamente afirma la igualdad de las velocidades de *todos* los movimientos acelerados que, partiendo del reposo, efectuasen el mismo descenso vertical. Además del Postulado, Galileo necesitaba un principio que permitiese establecer razones y proporción entre *un* movimiento acelerado por un plano cualquiera y el movimiento por la vertical y, a través de éste, con cualquier otro movimiento acelerado. Tal relación era la que se establecía, injustificada o inadecuadamente, al extender a movimientos acelerados la proporción entre espacios y tiempos establecida en el Teorema I para movimientos uniformes, que no se podía deducir del Postulado[60]. El prin-

[58] Hay una posible explicación alternativa, y ésta procedería de la teoría del impetus, dentro de la cual autores contemporáneos como Honoré Fabri contemplaban la adición, en *instantes físicos* —muy pequeños, pero finitos— de nuevas cantidades de impetus, que se iban acumulando en el cuerpo en caída libre. De este modo, el movimiento, en apariencia continuo, estaba compuesto en realidad de casi innumerables tramos de movimiento uniforme. ¿Por qué Galileo, pese a defender la continuidad del movimiento, no podría haber ensayado aquí esta técnica, técnica en la que los infinitesimales no parecen intervenir en absoluto? Sobre la teoría del impetus y las ideas de Fabri, véase DRAKE, S. (1974), «Impetus theory and quanta of speed before and after Galileo», *Physis*, 16, Fasc. 1, 47-65, y también DRAKE, S. (1975), «Impetus theory reappraised», *J. Hist. Ideas*, 36, 27-46.

[59] A diferencia de los indivisibles de sólido y de superficie que, siendo respectivamente superficies y líneas, pueden guardar razón entre sí dentro de su propia dimensión, los indivisibles de línea, siendo puntos inextensos, y por tanto carentes de dimensión, no son susceptibles de razón entre sí.

[60] Tal extensión, no siendo de naturaleza distinta los grados del movimiento uniforme de los del acelerado, como se ve en la demostración del Teorema I para movimientos acelerados, pudo haberle parecido natural.

cipio que precisaba es el que aparece en el anexo de Viviani antes aludido. Este principio permitirá demostrar tanto el Postulado como el Teorema III. De este último se dice allí que se prueba «más concluyentemente» que en la primera edición, lo que muestra que la demostración inicial se vería como problemática[61].

El principio, de carácter dinámico, aparece ya en *Le mecaniche* (1593), y afirma que el «ímpetu» o «momento parcial» de un grave en su movimiento por un plano inclinado es al «ímpetu máximo y total» de dicho grave por la vertical como la longitud de ésta es a la longitud de la inclinada. La nueva magnitud que aparece, el ímpetu o momento de la gravedad, es una medida de la modificación del peso que depende sólo de la inclinación del plano y no de su longitud. El momento es así una inclinación, una tendencia, «la propensione di andare al basso»[62]. Si se admite que las causas son proporcionales a los efectos que producen, entonces los momentos o tendencias al movimiento por la inclinada y por la vertical, si actuasen efectivamente, darían lugar a movimientos proporcionales a los mismos. Así, tal como se afirma en el anexo, los momentos son como las velocidades, esto es, como los espacios que atravesaría el grave por la inclinada y por la vertical en el mismo tiempo[63]. Ésta es la comparación entre las velocidades de dos movimientos acelerados que resultaba imposible lograr mediante técnicas indivisibilistas.

7. A MODO DE CONCLUSIÓN: ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL CONCEPTO DE MOMENTO

A lo largo de todo este estudio, queda claro que el momento es una entidad indivisible respecto de la magnitud que lo mide. En el caso del momento del peso, la magnitud que lo mide es la velocidad —o, alternativamente, el descenso vertical—, de modo que el momento se representaría por una línea cuando ésta se representa por una colección infinita de líneas que, en las circunstancias particulares que se han visto, equivale a una superficie. No parece, sin embargo, que la velocidad esté formada por un agregado infinito de momentos: lo está por un agregado de grados de velocidad. Sin embargo, al final de la Jornada sobre la percusión sí está claro que la cantidad de momento (¿la cantidad de ímpetu?) está constituída por tal agregado infinito de momentos elementales, uno por cada instante de tiempo.

61 EN, VIII, 218.

62 EN, II, 159.

63 EN, VIII, 218.

Otra observación atañe al «momento de la velocidad», que aparece conspicuamente en los *Discorsi*, por lo general junto al de grado, en expresiones como «momentos o grados de velocidad», pero con un sentido vinculado con el de aumento de la velocidad que, no obstante, Galileo nunca explicita. Por lo general, tanto el momento como el grado se ha venido interpretando, en definitiva, como la «velocidad instantánea», tal como la concebimos hoy, que posee el móvil en cada momento. En el detenido trabajo de Galluzzi, se señala un doble empleo del término en los *Discorsi*[64]. Lo más frecuente, con mucho, es que aparezca con este sentido de la «velocidad instantánea» alcanzada tras un determinado tiempo de caída; pero también se emplea en el sentido de incremento de «velocidad» —nuestro concepto de velocidad—, siempre constante, instante tras instante. Galluzzi pone como ejemplo de este último sentido la misma definición de movimiento acelerado:

> «Llamo movimiento igualmente, esto es, uniformemente acelerado, a aquél que, partiendo del reposo, adquiere en tiempos iguales iguales incrementos de velocidad»[65]

Pero aquí Galileo habla de tiempos iguales, no de instantes; el sentido de la definición y el tipo de incremento de velocidad implicado se hace patente en la fig. 12; los incrementos de velocidad tendrían hoy el sentido de un incremento de espacio. Por otra parte, la diferencia entre un grado de velocidad y su consecutivo en un movimiento acelerado, de acuerdo con las ideas expuestas en la Primera Jornada, no puede tener magnitud, es inextensa: sólo un número infinito de tales partes podrá constituir una magnitud extensa. De modo que lo que hoy consideraríamos la aceleración —el incremento de *nuestra* velocidad en un instante de tiempo— no tiene magnitud para Galileo. Sí lo tiene, sin embargo, la *cantidad* de aceleración, la suma de tales incrementos inextensos en un intervalo de tiempo dado: y éste es precisamente el momento de la velocidad. Del mismo modo que Galileo sostiene un concepto de velocidad tal que ésta —a diferencia de lo que consideramos actualmente— crece con el tiempo aún si el movimiento es uniforme, su concepción de la aceleración, análogamente, también sería «holista», y ésta crecería con el tiempo en el movimiento uniformemente acelerado, siendo representada por el momento de la velocidad. Este sentido no es el mismo que el de una «velocidad instantánea» que se le ha venido adjudicando. Por una parte, como

---

64 GALLUZZI (1979), 364, n. 2.

65 «Motum aequabiliter, seu uniformiter acceleratum dico illum qui, a quiete recedens, temporibus aequalibus eaqualia celeritatis momenta sibi superaddit» (EN, VIII, 198).

hemos visto, un grado de velocidad no es una velocidad; por otra parte, en un instante de tiempo, un indivisible inextenso que no es tiempo, no se puede recorrer ningún espacio. Desde mi punto de vista, el momento de la velocidad se podría caracterizar como la tendencia que posee el móvil en cada instante a proseguir su movimiento; los grados de velocidad representarían, por así decir, momentos ya consumidos —y desde luego habría que precisar lo que esto último significa—, constituyendo el momento una entidad que existe sólo en el presente. Este momento, entendido como tendencia, sería proporcional al ímpetu y a la velocidad *uniforme* que engendraría o engendrará con el transcurso del tiempo (por ejemplo, cuando un móvil llega a la base de un plano inclinado y prosigue su movimiento por la horizontal con velocidad constante). Como en el caso anterior del momento de la gravedad, se debe estipular el mismo intervalo de tiempo a la hora de establecer la correspondiente razón: la que hay entre dos ímpetus o dos momentos de velocidad es la de las correspondientes velocidades de los movimientos uniformes, esto es, el espacio recorrido en cada uno de ellos en un intervalo de tiempo dado. De este modo, el momento de la gravedad podría entenderse como una tendencia al movimiento acelerado, (o, mejor dicho, a modificar constantemente el movimiento uniforme), mientras que el de la velocidad lo sería a mantener dicho movimiento uniforme. Y el ímpetu, proporcional a ellos, representaría el efecto de esta velocidad.

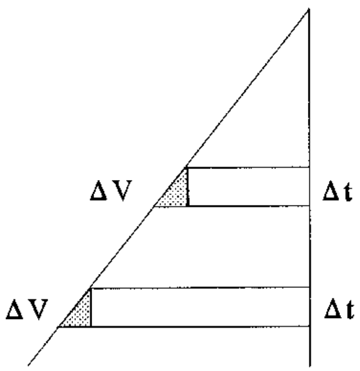

Fig. 12.

De este modo, la relación entre los momentos del peso y de la velocidad consistiría en que los primeros son como las velocidades que adquiere el móvil, por la inclinada y por la perpendicular, en el mismo intervalo de tiempo partiendo del reposo, las cuales, a su vez —dado que el intervalo de tiempo es el mismo—, son como los grados de velocidad alcanzados al cabo de ese intervalo de tiempo, es decir, como los momentos de la velocidad al final de dicho intervalo. Introduciendo nuestro concepto de «velocidad», en este caso igual al producto de la «aceleración» por el tiempo, se ve que lo anterior se podría interpretar, anacrónicamente, diciendo que la razón de las fuerzas es como la de las aceleraciones[66].

Para finalizar, hay que señalar que esta concepción de los momentos como indivisibles dotados de tendencias a generar magnitudes finitas que les son proporcionales supone la superación de las limitaciones de la teoría indivisibilista, pues gracias a ellos se pueden establecer razones entre los indivisibles allá donde, como en el caso de la escudilla, tal razón no existe o se llega a un resultado absurdo. Si se supone que tal generación se produce contra el trasfondo del flujo uniforme del tiempo, y siendo, en general, variables con el tiempo tanto los momentos como las correspondientes magnitudes generadas, la razón entre éstas en un intervalo de tiempo dado sólo será aproximadamente igual a la razón entre los momentos, pero tanto más aproximadas cuanto menor sea ese intervalo de tiempo. En el límite —un límite alcanzado, como se vio, sólo a través del movimiento— cuando esas cantidades «nacen» o se «desvanecen», la igualdad es estricta. Éste es ya el cálculo de fluxiones de Newton, en donde gracias a este concepto, que Galileo no llegó a desarrollar, aparecen superadas las limitaciones de la teoría de indivisibles haciéndolo comparable al cálculo diferencial leibniziano[67]. Todavía resta por conocer, sin embargo, el camino seguido entre ambas concepciones.

Fecha de recepción: 13 de octubre de 2005
Fecha de aceptación: 2 de febrero de 2006

[66] Esto quizás podría ayudar a entender por qué Newton, en el Escolio que sigue en los *Principia* al enunciado de las tres leyes del movimiento y a sus seis corolarios, atribuye a Galileo el empleo de las dos primeras leyes y de los dos primeros corolarios en el descubrimiento de la ley de caída de los graves y de la trayectoria parabólica de los proyectiles.

[67] Sobre el concepto de momento en Newton, véase SELLÉS, M.A. (1999), «Isaac Newton y el infinitesimal», *Theoria*, 14/3, 431-460. Sus implicaciones en la mecánica, en SELLÉS, M.A. (1998), «Impacto instantáneo y acción continua en la mecánica de Newton», *Éndoxa. Series filosóficas*, nı 11, 9-80. Se muestra allí que Newton empleó asimismo concepciones «holistas» similares a las de Galileo. Estas ideas se presentan en forma más elaborada y resumida en SELLÉS, M. (2006) «On infinitesimal foundations of Newton's machanics», *Historia Mathematica*, 33, 210-223.